椙山女学園大学教育学部紀要（*Journal of the School of Education, Sugiyama Jogakuen University*）**16**(1)：91–97（2023）

原著論文（***Article***）

大学生による数学探究活動の報告
── 秋山仁先生のメビウスフラワーに関連するいくつかの考察 ──
Report on inquiring activities for mathematics by university student: Several studies related Möbius flower by Professor Jin Akiyama

伊藤仁一*・田中麻綾*・堀内菜智*

ITOH Jin-ichi*, TANAKA Maya*, HORIUCHI Nachi*

要　　旨

椙山女学園大学教育学部３年生対象の講義「数学探究 II」の２コマを使って，秋山仁先生の講演にある，十字形状の紙の上下と左右を１ひねりして貼り合わせ，十字の中心線に沿って切る活動と，それに関連する探究活動をおこなった。ひねり方によりハート形状の帯が２つ連なったり（図１参照），離ればなれになったりする。講義内では十分な探究活動はできなかったが，その後２名の学生が講義後も，特にひねり数に興味を持って探究を続けてくれた結果を報告する。

キーワード：探究活動，メビウスの帯，結び目，絡み目，絡み数，メビウスの花

Key words : inquiring activities, Möbius band, knot, link, linking number, Möbius flower

はじめに

2021年度後期の椙山女学園大学教育学部３年生対象の講義「数学探究 I 」の２コマを使って，十字形状（ここでは４本足と呼ぶ）の紙の上下と左右を１ひねりして貼り合わせて，十字の中心線に沿って切るとどのような形状になるかと，その拡張についても学生と探究活動を行った。上下と左右のひねりを反対にすると（２ひねりされた）ハート形状の帯が２つ絡まり（図１参照），ひねりが同じ方向だとひねりのない）ハート形状の帯と（４ひねりの）ハート形状の帯とに絡まらずに分かれる（図２参照）（この題材は，秋山仁先生の十年以上前の講演から知った）。６本足や10本足にした場合やひねり数を増やして貼り合わせた場合にどうなるかを探究させると，ハートの５連からなる五輪ができたが再現できないとか盛り上がり，学生は楽しんでくれたが，講義内ではそれ以上の探究活動は難しかった。しかし，２名の学生（共著者）が講義後も，特にひねり数に興味を持って探究活動を続けてくれたことから，その結果を報告する。

１章では，長方形の紙を１ひねりして貼り合わせたものを一般にメビウスの帯と呼ぶが, 長方形（２本足）を a 回ひねって貼り合わせたものを n 等分した場合を考察した結果である。メビウスの帯を２等分した場合にできるものは長さが２倍の帯になるが，２ひねりの帯ではなく４ひねりになる理由と関連して，３以上の奇数回ひねりの場合にできたトーラス結び目を解消するとひねり数が元のひねり数の２倍＋2になるという結果が得られた。一般に，空間内の輪で円周に変形できないものを結び目といい，円周に変形できるものを自明な結び目という。ここでは，幅のある帯状のものを扱うが，幅を無くした状態の結び目としても考察する。結び目の中で最も単純なものがトーラス結び目である（１章３節参照）。結び目の上下を何回か取り替えて自明な結び目にすることを結び目を解消するという。

２章では，十字形（４本足）の上下の足を a 回，左右の足を b 回ひねって貼り合わせたものを切った場合に調べた結果を述べる。残念ながら，トーラス結び目以外の結び目が生じたときにひねり数をどのように扱うのが良いのかは分からなかったが，それ以外の場合のひねり数を予想した。また，この場合に生じる結び目や絡み目は，２橋結び目か絡み目に限られることを，九州大学の角先生に教えていただいた。

３章では，６本足の場合に，反対側の足を a 回，b 回，c 回ひねって貼り合わせたものを中心線に沿って切ったときにできる形状を調べた。３つのハート形状の帯がそれぞれ絡み数１で生じる場合や，ハート形状の帯の３連になる場合が生じるが，それぞれの帯のひねり数が２に揃うことはないようである。

絡み数に関しては，２つの向きのある輪について，片方がもう片方の周りをどちらの向きに何回周っているかを考え，ひねり数や絡み方について調べた。２つの有向結び目 J，K からなる絡み目の射影図の交点に注目し，交点に＋1，－1という符号を与え（図３参照），射影図全体におけるそれら

* 椙山女学園大学教育学部

2022年11月８日受付

の符号の総和を2で割ったものを絡み数と定義する。絡み数の符号について，今回はあまり関係がないため省略する。

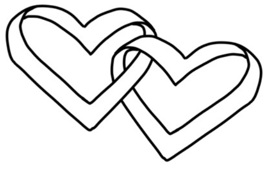

図1：2ひねりのハート2つ絡み

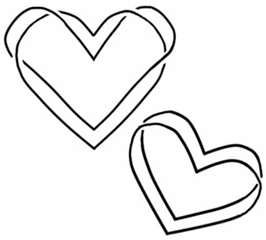

図2：0ひねり，4ひねりのハート

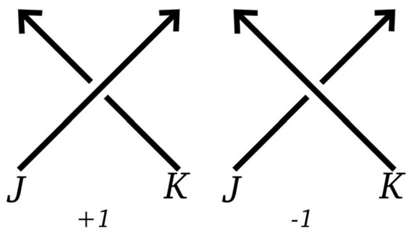

図3：絡み数

1. 数回ひねりのメビウスの帯の等分

ここでは長方形の帯を a 回ひねり，両端を貼り合わせたものについて考えていく。このとき，1ひねりしたものがメビウスの帯といわれるものである。（1ひねりは180°ひねりとする）

長方形の帯を n 等分するとき，それぞれの帯を（R_1, R_2, ... R_i, ... R_j, ... R_n）とする。（図4参照）（$1 < i < j < n$）

結果として，ひねり数と等分数の偶奇によってできる帯が大きく異なる。

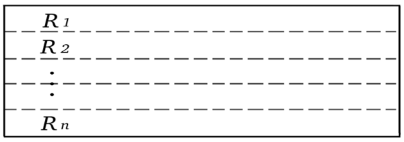

図4：帯の等分方法

1.1. ひねり数が偶数の場合

a（偶数）ひねりしたものを n 等分した様子を平面図で表した。n 等分すると長方形（以下，「元のもの」と表現する）の帯と同じ長さで，かつひねり数の帯が n 個できることが分かる。（図5参照）

（a：偶数）（$n \geqq 2$）

また，このできた帯の中から任意の2つの帯（R_i, R_j）に注目すると，交点が a 個であることから，できた帯のどの2つにおいても絡み数が $a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$ となる絡み方をしている。（図6参照）例えば，2ひねりのものを3等分すると，2ひねりで元の長さと同じ帯が3個でき，それぞれ絡み数が1の絡み方をしているものができる。（図7参照）

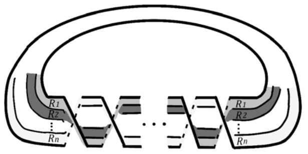

図5：偶数ひねりの n 等分

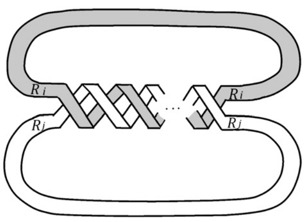

図6：任意の2つの帯の絡み数

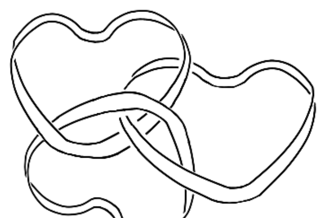

図7：2ひねりの3等分

1.2. ひねり数が奇数の場合

a（奇数）ひねりのものは等分数が偶数か奇数かによってできる帯が異なる。

(1)　$2n+1$等分の場合

$2n+1$等分したものを平面図で表す。$2n+1$等分（順に R_1, R_2, ... , R_{2n}, R_{2n+1}）すると，元と同じ長さで，かつ同じひねり数の帯が1つと，元の2倍の長さの帯が n 個できる。±1ひねりを等分してできる帯では，元の帯の倍の長さでひねり数は±4ひねりとなる。図8，9の左図はそれぞれの帯を等分した直後で，図8，9の右図のようにスライドさせると±2ひねりが生じることがわかり，できた帯のひねり数は±4となる。（図8，9参照）その他の奇数ひねりの等分ではトーラス結び目ができる。（図10，1.3. 参照）

偶数ひねりの等分とは異なり，奇数ひねりを等分すると R_1 と R_{2n+1} で1つの帯，R_2 と R_{2n} で1つの帯... というように2つで1つの組み合わせができるため，元の2倍の長さの帯が n 個できる。中心の R_{n+1} は他と貼り合わないので同じ長さ，同じひねり数のメビウスの帯が1つできる。

できる帯の任意の2つの帯の絡み方は，（元の倍の長さの帯，元と同じ長さの帯）の場合，交点が元のひねり数の2倍

の数できるので絡み数は元のひねり数 a となる。(図11参照)

それに対して,(元の倍の長さの帯,元の倍の長さの帯)はどの 2 つの帯でも交点が元のひねり数の 4 倍の数できるので,絡み数は $2a$ になる。(図12参照)

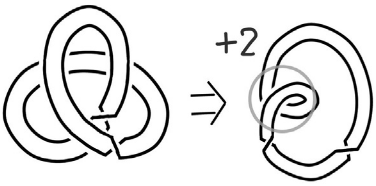

図 8 :1 ひねりのメビウスの帯の等分

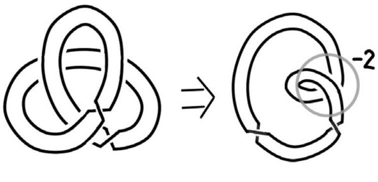

図 9 :−1 ひねりのメビウスの帯の等分

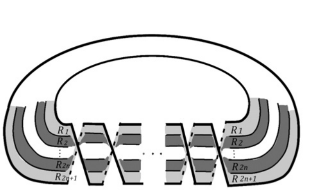

図10:奇数ひねりの奇数等分

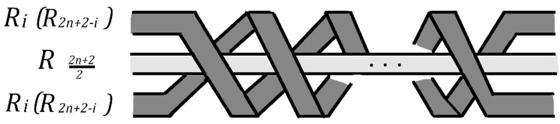

図11:元と同じ長さ,倍の長さの帯

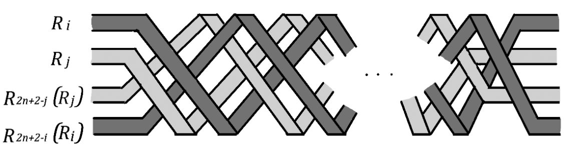

図12:元の倍の長さ,倍の長さの帯

(2) $2n$ 等分の場合

$2n$ 等分(順に $R_1, R_2, \dots, R_{2n}$)すると,R_1 と R_{2n} で 1 つの帯,R_2 と R_{2n-1} で 1 つの帯 … というように全てが 2 つで 1 つの組み合わせができるため,奇数等分のときとは異なり元と同じ帯はできず,元の倍の長さの帯が n 個できる。絡み方については図12と同じように考えることができ,絡み数は $2a$ となる。

1.3. トーラス結び目

奇数ひねりを等分してできる帯は特徴的で,1,−1 以外の奇数ひねりの等分では,元の倍の長さの帯は全てトーラス結び目ができた。

(1) トーラス結び目の定義

円柱において上面 C_1,底面 C_2,その中心を通る軸を l とする。C_2 の円周を n 等分するような点($P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$)を置き,それぞれの点から垂直に上へ線分を引き C_1 との交点にも点($Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$)を置く。(図13参照)

円柱の中心線を軸として $\frac{2\pi a}{n}$ だけひねりを加える。線分は $\frac{2\pi a}{n}$ 回転しながら C_1 と C_2 を結ぶ状態になる。(a, n: 互いに素)

点同士が重なるように C_1 と C_2 を貼り合わせてトーラスをつくると,線分が 1 つの結び目となる。これを (n, a) 型のトーラス結び目と定義する。特に $(2, 3)$ 型トーラス結び目は「三つ葉結び目」と言われる。(図14参照)

3 ひねりの等分では $(2, 3)$ 型トーラス結び目(三つ葉結び目),5 ひねりの等分では $(2, 5)$ 型,7 ひねりの等分では $(2, 7)$ 型のようにトーラス結び目ができる。例えば,3 ひねりを 3 等分すると元と同じ長さひねり数の帯が 1 つと三つ葉結び目(元の倍の長さ)で 6 ひねりの帯が 2 つできる。次にこの結び目を解消した状態でのひねり数について考えた。

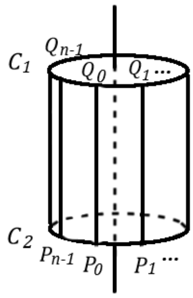

図13:点から垂直に線分を引く

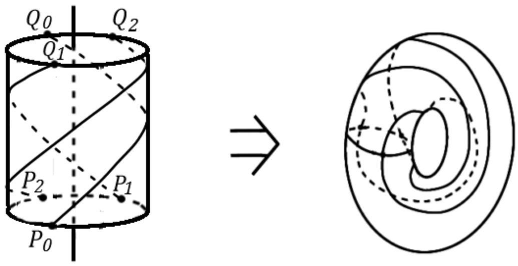

図14:(3, 1)型トーラス結び目

(2) 結び目の解消

$(2, a)$ 型トーラス結び目の解消のために,交点で上下を入れ替えていく。1 つの交点で上下を入れ替えると,2 つの交点分の結び目が解消される。(図15参照)

$\frac{a-1}{2}$ 個の交点で上下を入れ替えた後,$a>0$ の場合には 2 だけ増え,$a<0$ の場合には −2 だけ増える。(図16参照)

$(2, a)$ 型トーラス結び目に対して,結び目のある状態ではひねり数は $\frac{a-1}{2}$ 個の交点の上下を入れ替えることで結び目を解消でき,解消すると全て $2a\pm2$ ひねりとなり,1,−1 ひねりの等分においても $2a\pm2$ ひねりであり,結び目ができる場合もできない場合も $2a\pm2$ でひねり数を表すことができる。($a>0$ のとき $2a+2$,$a<0$ のとき $2a-2$)

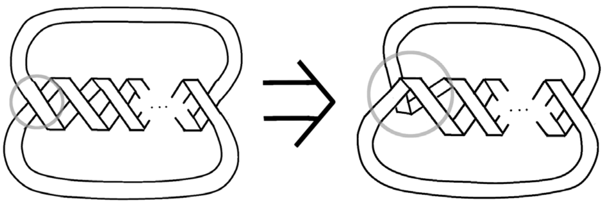

図15：(2, a) 型トーラス結び目

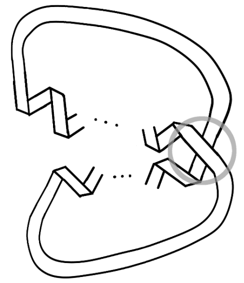

図16：結び目の解消

1.4. メビウスの帯の等分まとめ

以上の結果から，ひねり数や等分数を変化させたときにできるものは以下のようにまとめることができる。

(1)　a（偶数）ひねりの帯の等分

n 等分すると，元と同じ長さでひねり数が a となるものが n 個でき，それぞれ絡み数は $\frac{a}{2}$ である。

(2)　a（奇数）ひねりの帯の等分

$2n$（偶数）等分すると，元の 2 倍の長さの（$2, a$）型トーラス結び目が n 個でき，この結び目を解消するとひねり数が $2a\pm2$ となる（$a>0$ のとき $2a+2$，$a<0$ のとき $2a-2$）。また，それぞれの絡み数は $2a$ である。

$2n+1$（奇数）等分すると，元と同じ長さでひねり数が a となる帯 1 個と，元の 2 倍の長さの（$2, a$）型トーラス結び目となる帯が n 個でき，結び目を解消後のひねり数は偶数等分のときに準ずる。絡み数は，元と同じ長さの帯と元の倍の長さの帯で a，元の倍の長さの帯と元の倍の長さの帯で $2a$ となる。ただし，1 ひねりの等分では結び目はできない。

トーラス結び目の場合，結び目がある状態だと $2a$ ひねりとしか数えられないが，結び目を解消することによって倍の長さの帯のひねり数は $2a\pm2$ と表わすことができた。

2.　4本足を貼り合わせる等分

2.1. 向かい合う端を貼った２等分

向かい合う端を図のように貼り合わせ，2 等分をする。（図17参照）

先端をそれぞれ A, B, C, D とし，A–C を a ひねり，B–D を b ひねりで貼り合わせ，2 等分する。向かい合う端の貼り合わせ順については，6 本足までは張り合わせ順によらず同じものが生じる。

ひねり数を変えて 2 等分したときに出てくるものを 1 〜 5 ひねりまで実際につくって調べたところ次のような規則があると考えられる。

(1)　a, b どちらも奇数の場合

できる帯は長さの同じものが 2 つ（それぞれを R_1, R_2 とする）で，ひねり数はそれぞれ R_1：$a+b-2$，R_2：$a+b+2$ となる。これらの絡み数は $\frac{|a-b|}{2}$ となる。

ただし，$(a, b)=(3, 3), (3, 5)$ のとき絡んでいるが絡み数は 0 になるものができた。それぞれ 5^2_1，7^2_1 といわれる絡み目である（絡み目の番号は［4］による）。調べた範囲で出てきたのはこの 2 種類だけであった。（図18参照）

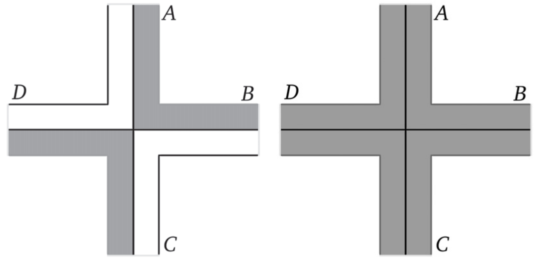

図17：向かい合う端を貼った 2 等分の貼る前の図

左図は a, b が奇数,
右図は a, b どちらかが偶数の場合

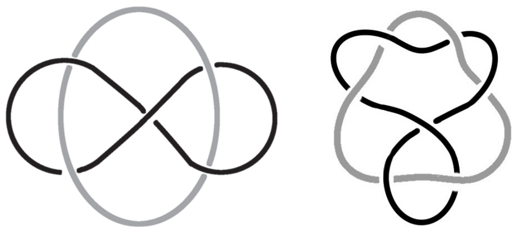

図18：絡み数 0 の絡み目

左図は絡み目 5^2_1，右図は絡み目 7^2_1

(2)　a, b のどちらか一方が ±1，もう一方が偶数の場合

次のような規則で 1 つのトーラス結び目ができると予想できる。

$a=1, b>2$ または，$a=-1, b\geqq2$ のとき，長さ 2 の（$2, b-a$）型トーラス結び目ができ，この結び目を解消するとひねり数が $2(a+b)+2$ となる。$a=1, b=2$ のとき結び目はできない。

$a=1$, $b\leqq-2$ または，$a=-1$, $b<-2$ のとき，長さ 2 の（$2, b-a$）型トーラス結び目ができ，この結び目を解消するとひねり数が $2(a+b)-2$ となる。$a=-1$，$b=-2$ のとき結び目はできない。

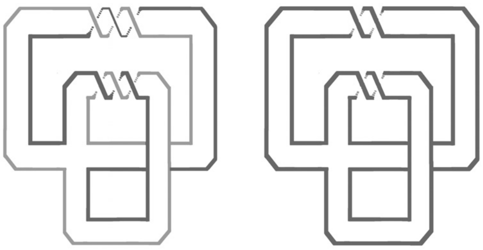

図19：向かい合う端を貼った２等分の帯
左図は a, b が奇数，
右図は a, b どちらかが偶数の場合

2.2. 向かい合う端を貼った３等分

４本足の向かい合う端を図のように貼り合わせ，３等分をする。（図20参照）

先端をそれぞれ A, B, C, D とし，A–C を a ひねり，B–D を b ひねりで貼り合わせ，２等分する。ひねり数を変えて２等分したときにできるものを１～５ひねりまで実際に調べたところ，次のような規則があると考えられる。

(1)　a, b **が奇数の場合**

できる帯は長さの同じものが３つ（それぞれを R_1, R_2, R_3 とする），ひねり数はそれぞれ R_1：$a+b-2$，R_2：$a+b-2$，R_3：$a+b+2$ となる。これらの絡み数は R_1, R_2 で $\frac{|a+b-2|}{2}$，R_2, R_3 で $\frac{|-a+b|}{2}$，R_3, R_1 で $\frac{|-a+b|}{2}$ となる。

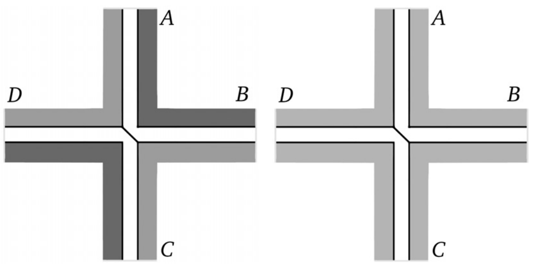

図20：向かい合う端を貼った３等分の貼る前の図
左図は a, b が奇数，
右図は a, b どちらかが偶数の場合

(2)　a, b **のどちらかが偶数の場合**

できる帯は長さの同じものが２つ（それぞれを R_1, R_2 とする），ひねり数はそれぞれ R_1：$a+b-2$，R_2：$2a+2b$ となる。これらの絡み数は $\frac{|2a+2b|}{2}$ となる。

※下図の色の異なる線は等分した際にできるそれぞれの帯を表している。

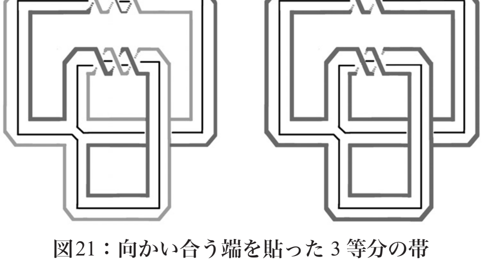

図21：向かい合う端を貼った３等分の帯
左図は a, b が奇数，
右図は a, b どちらかが偶数の場合

上記のひねり数以外の場合には，トーラス結び目ではない結び目ができる。例えば，$a=2$, $b=3$ のとき，図22のような８の字結び目ができる。このような結び目では，結び目を解消しても，ひねり数は a, b によって決まるかどうかがわからなかった。

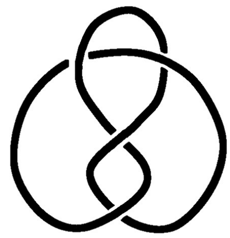

図22：８の字結び目

４本足を向かい合う端を貼り合わせた場合にできる結び目や絡み目は全て２橋結び目・絡み目となる。（２橋結び目・絡み目とは空間で１つの座標軸に関する高さ関数が２つの極大値と極小値をもつもので，図23の下図のような状態にできるものと定義され，結び目や絡み目では比較的よく分かっているものと思われる。）４本足の反対側を貼り合わせた場合は図23の左上図の状態から右上図の状態を経て，下図のように変形される。

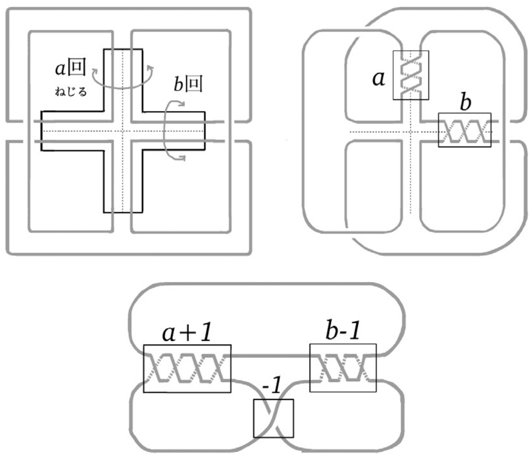

図23：２橋結び目・絡み目の変形

2.3. 隣り合う端を貼った２等分

４本足の端を図のように隣り同士を貼り合わせ，２等分をする。（図24参照）

先端をそれぞれ A, B, C, D とし，A–B を a ひねり，C–D を c ひねりで貼り合わせ，２等分する。ひねり数を変えて，２等分したときにできるものを調べたところ，次のような規則があると考えられる。

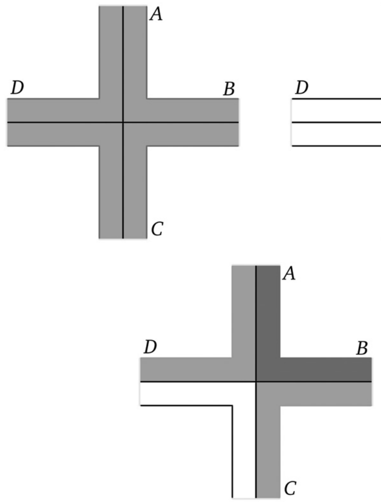

図24：隣り合う端を貼った 2 等分の貼る前の図

左上図は a, b が奇数，右上図は a が奇数，b が偶数，
下図は a, b が偶数

(1)　a, c **が奇数の場合**

それぞれの帯で $2a\pm2$ ひねりの $(2, a)$ 型トーラス結び目と，$2c\pm2$ ひねりの（$2, c$）型トーラス結び目が 1 つずつでき，それらが貼り合わされたものができる。つまり，1 つの帯に結び目が 2 種類あるものができ，ひねり数はそれぞれのひねり数の和より，$2a\pm2+2c\pm2$ となる。($a>0$ のとき $2a+2$，$a<0$ のとき $2a-2$，$c>0$ のとき $2c+2$，$c<0$ のとき $2c-2$)。(図25左上図参照)

(2)　a, c **のどちらかが偶数の場合**

a（偶数）ひねりの帯の等分では，a ひねりの帯が 2 個でき，絡み数は $\frac{a}{2}$ である。

c（奇数）ひねりの帯の等分では，$2c\pm2$ ひねりの（2, c）型トーラス結び目が 1 つずつできる。この結び目と a（偶数）ひねりの帯の片方の帯が繋がり 1 つの帯となるため，長さ1.5の $a+2c\pm2$ ひねりの帯に，長さ0.5の帯が絡み数 $\frac{a}{2}$ で絡む。(図25右上図参照)

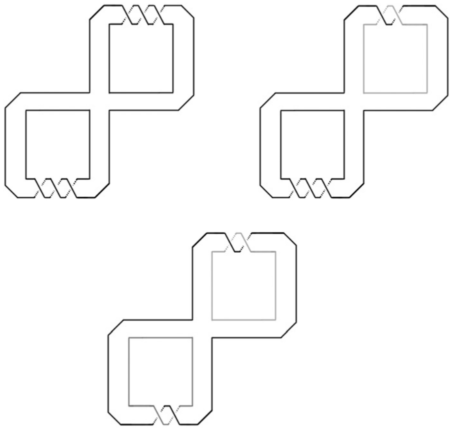

図25：隣り合う端を貼った 2 等分の帯

左上図は a, b が奇数，右上図は a が奇数，b が偶数，
下図は a, b が偶数

(3)　a, c **が偶数の場合**

それぞれで a ひねりの帯が 2 個でき，絡み数 $\frac{a}{2}$ で絡んでいるものと，c ひねりの帯が 2 個でき，絡み数 $\frac{c}{2}$ で絡んでいるものができる。

図25下図のようにそれぞれ片方の帯同士が繋がり 1 つの帯となるため，長さ1.5の $a+c$ ひねりの帯に，長さ0.5の a ひねりの帯が絡み数 $\frac{a}{2}$，長さ0.5の c ひねりの帯が絡み数 $\frac{c}{2}$ で絡む。

3. ６本足を貼り合わせる場合

向かい合う端を図のように貼り合わせ，2 等分をする。(図26参照)

先端をそれぞれ A, B, C, D, E, F とし，A–D を a ひねり，B–E を b ひねり，C–F を c ひねりで貼り合わせ，2 等分する。

ひねり数を変えて，2 等分したときにできるものを調べたところ，次のような規則があると考えられる。

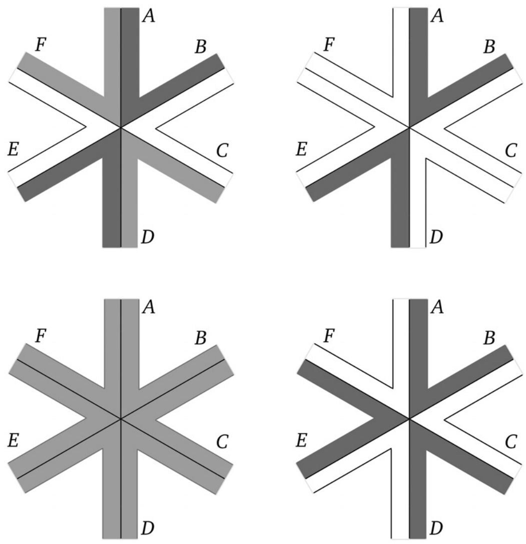

図26：６本足を貼る前の図

左上図は a, b, c が奇数，
右上図は a, b が奇数，c が偶数，
左下図は a が奇数，b, c が偶数，
右下図は a, b, c が偶数

(1)　a, b, c **が奇数の場合**

できる帯は長さの同じものが 3 つ（それぞれを R_1, R_2, R_3 とする），ひねり数はそれぞれ R_1：$a+b-2$，R_2：$b+c-2$，R_3：$a+c+2$，となる。これらの絡み数は R_1, R_2 で $\frac{|b-1|}{2}$，R_2, R_3 で $\frac{|c-1|}{2}$，R_3, R_1 で $\frac{|a-1|}{2}$ となる。

2 等分すると図27のようになる。

帯 R_1 のひねり数について考えると，a, b のひねりをもつことが分かる。また，帯が自身と交差している部分では交差を解消すると -2 のひねりが生じる。その為，帯 R_1 のひねり数は $a+b-2$ となる。

また，帯 R_2 では，b, c のひねりをもつことが分かる。また，

帯が自身と交差している部分では交差を解消すると－2のひねりが生じる。よって，帯 R_2 のひねり数は $b+c-2$ となる。

同様に，帯 R_3 では，a, c のひねりをもつことが分かる。また，帯が自身と交差している部分では交差を解消すると＋2のひねりが生じる。よって，帯 R_3 のひねり数は $a+c+2$ となる。

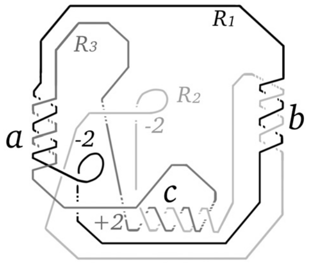

図27：a, b, c が奇数２等分の帯

(2)　a, b が奇数，c が偶数の場合

できる帯は２つ（それぞれを R_1, R_2 とする），長さはそれぞれ R_1：1, R_2：2, ひねり数は R_1：$a+b-2$, R_2：$a+b+2c$ で，R_2 には（2, c）型トーラス結び目ができる。これらの絡み数は $\frac{|a+b-2|}{2}$ となる。

２等分すると図28のようになる。

帯 R_1 のひねり数について考えると，a, b のひねりをもつことが分かる。また，帯が自身と交差している部分では交差を解消すると－2のひねりが生じる。その為，帯 R_1 のひねり数は $a+b-2$ となる。

また，帯 R_2 では，$a, b, c\times2$ のひねりをもつことが分かる。また，帯が自身と交差している部分では交差を解消すると＋2と－2のひねりが生じる。ここで，帯 R_2 では図の c の部分で同一の帯が $\frac{2\pi c}{n}$ 回転して絡み合っており，(2, c）型トーラス結び目が生じることが分かる。よって，帯 R_2 のひねり数は $a+b+2c$ となる。

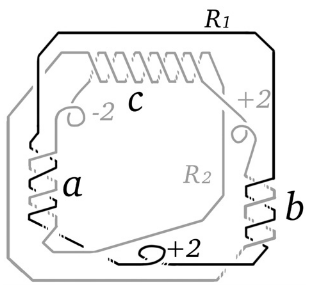

図28：a, b が奇数，c が偶数２等分の帯

(3)　a が奇数，b, c が偶数の場合

できる帯は１つで，長さは３，ひねり数は（2, c）型トーラス結び目ができるときには $2a+2b+2c-2$ となる。出てくる結び目はトーラス結び目だけでないため，そのときのひねり数は結び目を解消しても，ひねり数は a, b によって決まるかどうかがわからない。

(4)　a, b, c が偶数の場合

できる帯は２つ（それぞれを R_1, R_2 とする），長さはそれぞれ R_1：1.5，R_2：1.5，ひねり数は R_1：$a+b+c-2$，R_2：$a+b+c-2$ となる。これらの絡み数は $\frac{|a+b+c-2|}{2}$ となる。

おわりに

昨今，学校教育において探究活動を求められるようになってきている。将来の教師を育てる教員養成系大学・学部における教育において，どのような探究活動を取り入れるべきであるかは，重要な問題である。特に数学教師に必要な素養としての数学の理解が難しく，それのみに追われているように感じられる。

今回の探究活動では，６本足の場合までしか考察できなかったが，８本足以上になると貼り合わせの順番（上下）によって異なるものが生じ，さらに複雑になる。結び目や絡み目に詳しくない大学生による探究活動であるため，絡み数ゼロの絡み目があるという知識はなく, 多難であった。しかし，十分楽しんでくれたようであり，大学生による探究活動として，この題材は，具体性にとみ興味深いのではないかと思われる。

a ひねりのメビウスの帯を n 等分するとどのような形状の帯が出来るかという課題は，熊本大学の学生にも与えた課題であり，多くの数学者が高校での出前授業等でも使っているように思われる。しかし，どのようになるかを完全に記述したものは，ネット等でも見つけられなかった。６本足の奇数ひねりの２等分の場合に，ボロミアン絡み目といわれる３個の輪の絡み目が現れなかったのは残念である。

秋山先生は，2N 本足を向かい合わせに１ひねりしてある順番に貼り合わせたものをメビウスの花と名づけて，中心線で２等分するとハート形状のものが連なったりすることを紹介されている（[3]）。

参考文献

[1] C. アダムス（金信泰造訳）：結び目の数学 結び目理論への初等的入門，丸善出版（2021）.
[2] 村杉邦男：結び目理論とその応用, 日本評論社（1993）.
[3] Jin Akiyama: Möbius flowers and Buds, Extended abstract: The 23rd Thailand-Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games, (2021) 88–89.
[4] Dale Rolfsen: Knots and Links, Publish or Perish, Inc., (1976).