9 次元上半空間上のテータ関数

吉本明宣 *Akinori YOSHIMOTO*

Abstract

The purpose of this paper is to make n-th power theta functions which have coefficients in integers sum such that they are 1 in n-th powers parts and 0 in not-n-th powers parts. We use n-th powers symbol to construct them, but they are much different from generalized theta functions defined by [2].

In the paper, our theta functions are only quadratic theta functions, cubic theta functions and biquadratic theta functions, but they can be expected to be generalized to n-th power theta functions considering the products of 9–dimension upper half space.

キーワード：□テータ関数　□一般化されたテータ関数
□ 9 次元上半空間　□ 4 元数体
□ n べき剰余記号　□保型関数
□ 2 乗のテータ関数　□ 3 乗のテータ関数
□ 4 乗のテータ関数

はじめに

テータ関数は、ゼータ関数など整数論の多岐に渡る分野と深いつながりがあり、極めて重要な関数である。一般的にテータ関数は、ある関数の整数値全体の和として定義されるが、整数の 2 乗部分での係数が 1 で、そうでない整数部分では 0 となる関数である。

［2］において、一般化されたテータ関数が n べき剰余の値を含む関数から構成された。しかしながら、そのテータ関数は、整数全体を渡る和の形はしており、整数の n 乗部分以外の係数は 0 となっているが、整数の n 乗部分の係数は 1 となっていない。そのため、通常のテータ関数を用いて得られる整数論の重要な結果を、一般化されたテータ関数を用いて拡張することは困難である。その一方で、一般化されたテータ関数が 3 次元上半空間上で定義された保型関数であることは新しい可能性を示唆しているように思えた。

そこで、我々はテータ関数の定義空間を 9 次元上半空間に拡張し、新しいテータ関

数の構成を試みた。そのテータ関数は、やはり n べき剰余の値を用いて構成する。その関数は整数部分を渡る関数の和として定義されており、整数の n 乗部分以外の係数は 0 となっているが、整数の n 乗部分の係数は 1 となっている。このテータ関数は、上で述べた通常のテータ関数を応用して得られる整数論の重要な結果を一般化することが期待できる。

第 1 節では、3 次元上半空間において知られている結果を 9 次元上半空間に拡張することを試みる。第 2 節では、ポアソンの和公式を 4 元数体の整環上で考察し、量指標付きの関数でもポアソンの和公式が成り立つことをみる。第 3 節では、n べき剰余の値を用いて新しいテータ関数を構成する。

1　9 次元上半空間の基礎的知識

この章では、9 次元上半空間（9 次元双曲多様体）H^9 の性質を見ていく。$a<0$, $b>0$ を有理整数とし、$u_a{}^2=a, u_b{}^2=b, u_a u_b=-u_b u_a$ によって、K を $\mathbb{Q}(i)$ または $\mathbb{Q}(w)$（w は 1 の 3 乗根）としたとき、K 上の不定符号 4 元数体 A を次のように定義する。

(1.1)
$$A=K+Ku_a+Ku_b+Ku_a u_b$$

p, q を適当な素数とするとき、$\left(\dfrac{-p,q}{\mathbb{Q}}\right)$ は 4 元数体となり、$A=\left(\dfrac{-p,q}{\mathbb{Q}}\right)\otimes_{\mathbb{Q}}K$ であることに注意する。

A の 1 つの既約表現は

$$u_a \to \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}, u_b \to \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}$$

によって得られる。これによって、$A\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ と $M_2(\mathbb{C})$ との同型が得られ、A は $M_2(\mathbb{C})$ の部分体と考えられる。

$g=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\in M_2(\mathbb{R}))$ に対して、$G=SL(M_2(\mathbb{C}))$ を次のように定義する。

(1.2)
$$G=\{g|\det(g)=1\}$$

そのとき、G は群になる。

さらに、H^9 の元 $U=(X, h)$, $(X\in M_2(\mathbb{C}), h>0)$ に対して、$\tilde{h}=\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ とおき、

$U=\begin{pmatrix} X & -\tilde{h} \\ \tilde{h} & \bar{X} \end{pmatrix}$ を対応させるものとして、$\sigma\in G$ に対して、

(1.3)
$$\sigma U=(\tilde{A}\,U+\tilde{B})(\tilde{C}\,U+\tilde{D})^{-1}, \sigma=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in G, \tilde{X}=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & \bar{X} \end{pmatrix}$$

とする。ここでは、X を $A\otimes_{\mathbb{Q}}$ の元として考えている。ここで、$W=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\in G$ に対して、$W(O,1)=(X,h)=U$ と定義する。

$W(O,1)=(X,h)=U$ だから、

$$W(O,1)=W\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\left(\tilde{A}_{11}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\tilde{A}_{12}\right)\left(\tilde{A}_{21}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\tilde{A}_{22}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{12} & -A_{11} \\ \overline{A_{11}} & \overline{A_{12}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ \overline{A_{21}} & \overline{A_{22}} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{|\det(A_{21})|^2+|\det(A_{22})|^2}\begin{pmatrix} A_{12}\overline{A_{22}}+A_{11}\overline{A_{21}} & A_{12}A_{21}-A_{11}A_{22} \\ \overline{A_{11}}\,\overline{A_{22}}-\overline{A_{12}}\,\overline{A_{21}} & \overline{A_{11}}A_{21}+\overline{A_{12}}A_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\det(A_{21})|^2+|\det(A_{22})|^2}\begin{pmatrix} A_{12}\overline{A_{22}}+A_{11}\overline{A_{21}} & -1 \\ 1 & \overline{A_{11}}A_{21}+\overline{A_{12}}A_{22} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$W=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\in G$ であることから、$A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=1$ であることに注意する。

(1.4) $X=\dfrac{1}{|\det(A_{21})|^2+|\det(A_{22})|^2}(A_{12}\overline{A_{22}}+A_{11}\overline{A_{21}}),\ h=\dfrac{1}{|\det(A_{21})|^2+|\det(A_{22})|^2}$

$$\sigma U=(\tilde{A}U+\tilde{B})(\tilde{C}U+\tilde{D})^{-1},\ \sigma=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in G,\ \tilde{X}=\begin{pmatrix} X & O \\ O & \overline{X} \end{pmatrix}$$

によって G は 9 次元上半空間 $H^9(\ni U=(X,h))$ に作用する。

ここで、$W(O,1)=(O,1)$ を満たす G の集合 S を考えると、$W=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\in S$ は $|\det(A_{21})|^2+|\det(A_{22})|^2=1,\ A_{11}\overline{A_{21}}+A_{12}\overline{A_{22}}=0,\ A_{22}=-\overline{A_{11}},\ A_{12}=\overline{A_{21}}$ がみたさなければならない。すると、次のように定義できる。

(1.5) $$S=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\in SL(2,M_2(\mathbb{C})\,\middle|\,|\det(\alpha)|^2+|\det(\beta)|^2=1,\ \alpha\overline{\beta}=\overline{\beta}\alpha\right\}$$

S は G のユニタリー部分群となる。

S の元 $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ に対して、$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}(O,1)=(X,h)$ であるならば、

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -1 \\ 1 & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & -1 \\ 1 & O \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{h} & O \\ O & \sqrt{h}^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & X \\ O & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}(O,1)=(O,1)$$

が成り立つ。

$\sqrt{h}A_{21}=\beta,\ \sqrt{h}A_{22}=\alpha$ とおけば、岩沢分解

(1.6) $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & X \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{h} & O \\ O & \sqrt{h}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

がわかる。

　また、H^9 の元 $U=(X,h)$, $(X\in M_2(\mathbb{C}), h>0)$ において、$X=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$,

$z_j=x_j+iy_j(j=1,2,3,4)$ とおくと、リーマン計量

$ds^2=\dfrac{1}{h^2}(dx_1{}^2+dy_1{}^2+dx_2{}^2+dy_2{}^2+dx_3{}^2+dy_3{}^2+dx_4{}^2+dy_4{}^2+dh^2)$ に対して、体積要素

は $dV=\dfrac{dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3dx_4dy_4dh}{h^9}$ となることに注意する。

2 A の加群に関するポアソンの和公式

　O を (1.1) で定義された K 上の四元数体 A の極大整環とする。O は加群であるが、その双対加群を O^* とする。O の実数倍の R をとり、$R=R^*$ となるようにできる。R は $M_2(\mathbb{C})$ 内の加群で、$M_2(\mathbb{C})/R$ はコンパクト群となる。$M_2(\mathbb{C})$ 上シュワルツ関数 $f(X)$ に対して、$f(X)$ のフーリエ変換 $f^*(Y)$ を次のように定義する。

(2.1)
$$f^*(Y)=\int_{M_2(\mathbb{C})} f(X)^{2\pi i\cdot tr(XY)}dX$$

　そのとき、よく知られているポアソンの和公式として次の定理が成り立つ。
定理 2.1 上で定義した $M_2(\mathbb{C})$ 内の加群 R に対して、次の等式が成り立つ。

(2.2)
$$\sum_{m\in R} f(m)=\sum_{m\in R} f^*(m)$$

　いま、λ を O 上の量指標とする。すなわち、λ は $O\to\mathbb{C}$ の乗法的関数である。R は適当な複素数 $u(u\notin O)$ に対して、$R=uO$ となっているが、$\lambda(u)=1$ と定義することによって、λ は R の量指標とみることができる。そのとき、次の定理が成り立つ。
定理 2.2　上で定義した $M_2(\mathbb{C})$ 内の加群 R に対して、次の等式が成り立つ。

(2.3)
$$\sum_{m\in R} \lambda(m)f(m)=\sum_{m\in R} \overline{\lambda}(m)f^*(m)$$

　ここで、$\overline{\lambda}$ は λ の複素共役である。
証明　アデールの概念を用いると、λ の f の局所的なフーリエ変換は 1 となることがわかる。したがって、(2.3) が成り立つ。　(q.e.d.)
　上半空間 H^9 上のテータ関数を構成するために、(2.3) の等式に現れる λ を次のようにとる。

(2.4)
$$\lambda : x\mapsto x^i\ (i\in\mathbb{Z})$$

もう 1 つの λ として次のようなものを考える。N を自然数、$\tilde{O}$ を K の整数環としたとき、

(2.5) $$GL(2,\tilde{O})_N=\{\sigma\in GL(2,\tilde{O})|\sigma\equiv 1 \pmod N\}$$

と定義する。

定理 2.3（[1]）σ を $GL(2,\tilde{O})_N$ の元であるとすると、次で定義された x は指標である。

(2.6) $$x(\sigma)=\begin{cases}\left(\dfrac{c}{d}\right) & c\neq 0\\ 1 & c=0\end{cases}$$

ここで、$\left(\dfrac{c}{d}\right)$ は n べき剰余記号である。

（2.3）で使う λ として、

(2.7) $$\lambda : m(\in R|_{GL(2,\tilde{O})})\mapsto u(\in I)$$

を用いる。ここで、I は 1 の 3 乗根からなる乗法群または 1 の 4 乗根からなる乗法群である。

3 テータ関数の構成

$w=(X,h)$ は上半空間 H^9 の元であるとする。$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ に対して、$tr(X)=(a+d)+(\bar{a}+\bar{d})$ とし、R を 2 節で定義した加群であるとする。また、p,q を 1 節で A を構成したときに用いた素数とする。また、$N=pq$ とおき、

(3.1) $$\Gamma(N)=\left\{m\in R\,\middle|\, m\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\pmod N\right\}$$

と定義する。

定理 3.1　$\Theta_2(w)=h^{1/4}\sum_{M\in R}e^{-\pi N(m)^2h}e^{2\pi i tr(mX)}$ は $\Gamma(N)$ の作用で不変である。

証明　h は正の実数を動くものとする。正の実数上のシュワルツ関数を $f(h)$ とする。また、$f(-h)=f(h), f(0)=c$（$c=\lim_{h\to 0}f(h)$）とすると、$f(h)$ は実数全体上のシュワルツ関数と考えることができる。（1.6）によって、正の実数全体は $M_2(\mathbb{C})$ の制限と考えることができるので、実数上のシュワルツ関数 $f(x)$ に対して．f のフーリエ変換 $f^*(y)$ を $f^*(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{2\pi ixy}dx$ と定義すると定理 2.1 が成り立つ。ここで、$f(h)=h^{1/2}\sum_{M\in R}e^{-\pi N(m)^2h}$ と定義する。$\Theta_2(O,h)=f(h)$ であることに注意する。また、定理 2.1 より、O の元 a に対して、

(3.2) $$h^{-1/4}\sum_{m\in R}e^{-\pi N(m)^2/ah}=ah^{1/4}\sum_{m\in R}e^{-\pi N(m)^2h}$$

が成り立つことに注意する。さらに、$\Gamma(N)$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

であることに注意すれば、$\Theta_2(w)$ は $\Gamma(N)$ の保型関数であることがわかる。　(q.e.d.)

(1.1) の四元数体 A を定義する K を $\mathbb{Q}(w)$ とし、その極大整環を O_1 とする。2節で O_1 より構成された加群を R_1 とする。O_1 で定義された (2.6) の指標を x_1 とし、$R_1 = u_1 O_1$ であるので、$x_1(u_1) = 1$ と定義することによって、x_1 は R_1 の指標となる。x_1 は3乗剰余によって定義されているので、値は1の3乗根になることに注意する。

同様にして、(1.1) の四元数体 A を定義する K を $\mathbb{Q}(i)$ とし、その極大整環を O_2 とする。2節で O_2 より構成された加群を R_2 とする。O_2 で定義された (2.6) の指標を x_2 とし、$R_2 = u_2 O_2$ であるので、$x_2(u_2) = 1$ と定義することによって、x_2 は R_2 の指標となる。x_2 は4乗剰余によって定義されているので、値は1の4乗根になることに注意する。また、x_0 を平方剰余記号であるとすると、$x_0(u_2) = 1$ と定義することによって、x_0 は R_2 の指標となる。さらに、値は1の2乗根になる。

そこで、$\Theta_2(w)$ を使って、次のような関数を定義する。

$$\Theta_2(x_0{}^i, w) = h^{1/4} \sum_{m \in R} e^{-\pi N(m)^2 h} x_0{}^i(m) e^{2\pi i tr(mX)} \tag{3.4}$$

$$\Theta_2(x_1{}^i, w) = h^{1/4} \sum_{m \in R} e^{-\pi N(m)^2 h} x_1{}^i(m) e^{2\pi i tr(mX)} (i = 1.2) \tag{3.5}$$

$$\Theta_2(x_2{}^i, w) = h^{1/4} \sum_{m \in R} e^{-\pi N(m)^2 h} x_2{}^i(m) e^{2\pi i tr(mX)} (i = 1.2.3) \tag{3.6}$$

(3.4)、(3.5) と (3.6) を用いて次のようなテータ関数を構成する。

$$\Theta_2(w) = \sum_{i=0}^{1} \Theta_2(x_0{}^i, w) = h^{1/4} \sum_{m_0 \in R} e^{-\pi N(m_0)^2 h} e^{2\pi i tr(m_0 X)} \tag{3.7}$$

$$\Theta_3(w) = \sum_{i=0}^{2} \Theta_2(x_1{}^i, w) = h^{1/4} \sum_{m_1 \in R} e^{-\pi N(m_1)^2 h} e^{2\pi i tr(m_1 X)} \tag{3.8}$$

$$\Theta_4(w) = \sum_{i=0}^{3} \Theta_2(x_2{}^i, w) = h^{1/4} \sum_{m_2 \in R} e^{-\pi N(m_2)^2 h} e^{2\pi i tr(m_2 X)} \tag{3.9}$$

ここで、m_0 は $N(m_0)$ が2乗となる R の元全体を動き、m_1 は $N(m_1)$ が3乗となる R の元全体を動き、m_2 は $N(m_2)$ が4乗となる R の元全体を動く。

定理 3.2　$\Theta_2(w)\Theta_3(w)$ と $\Theta_4(w)$ は $\Gamma(N)$ の作用で不変である。

証明　$\Theta_2(x_0{}^i, w)$、$\Theta_2(x_1{}^i, w)$ と $\Theta_2(x_2{}^i, w)$ が $\Gamma(N)$ の作用で不変であることは定理2.2よりわかるので、それらの和である $\Theta_2(w)$、$\Theta_3(w)$ と $\Theta_4(w)$ は $\Gamma(N)$ の作用で不変である。　(q.e.d.)

$\Theta_2(w), \Theta_3(w), \Theta_4(w)$ をそれぞれ上半空間 H^9 上の 2 乗のテータ関数、3 乗のテータ関数、4 乗のテータ関数とよぶことにする。

おわりに

第 3 節の結果によって、従来のテータ関数を用いた整数論の重要な結果を拡張できる可能性が生まれた。5 乗以上のテータ関数の構成は 9 次元上半空間上では困難で、9 次元上半空間のいくつかの積でテータ関数を構成することが必要となる。それらの過程を経て、一般の n 乗のテータ関数の構成が可能となってくる。そのときこそ、整数論での重要な結果が得られる期待が持てるであろう。

参考文献

［1］ T.kubota: Ein arithmetisher Satz uber eine Matrizengruppe, Jour.reine u. angew. Math., 222(1966), 10–26

［2］ T.Kubota: On automorphic functions and the reciprocity law in a number field, Lectures in Math., 2, Kyoto University, 1969

【著者略歴】

吉本　明宣（よしもと　あきのり）

1959 年　愛知県生まれ

所　属・現　職　　椙山女学園大学　現代マネジメント学部　現代マネジメント学科・准教授

最終学歴・学位　　1988 年　名古屋大学大学院　理学研究科　博士課程後期課程数学専攻満期退学・修士（理学）

所　属　学　会　　日本数学会

主　要　業　績　　「行列変数の解析関数について」『社会とマネジメント』9（1）（2011），椙山女学園大学現代マネジメント学部，pp. 57–70.

「行列変数の有理型関数について」『社会とマネジメント』10（2）（2011），椙山女学園大学現代マネジメント学部，pp. 21–30.

「有理数体上の四元数体のガロア拡大」『社会とマネジメント』12（2013），椙山女学園大学現代マネジメント学部，pp. 67–76.

「$\mathbb{Q}$ 上 2 次ガロア表現に関する Langlands 予想について」『椙山女学園大学研究論集』第 53 号，自然科学篇（2022）pp9–18.