椙山女学園大学研究論集　第53号（自然科学篇）2022

# $\mathbb{Q}$上２次ガロア表現に関する Langlands 予想について

吉　本　明　宣*

On Langlands' Conjecutre Concerning about Galois Representations of Degree Two on $\mathbb{Q}$

Akinori YOSHIMOTO

## はじめに

$\mathbb{Q}$上の２次のガロア表現に関する Langlands 予想［1］とは，「$\mathbb{Q}$上２次のガロア表現の$L$関数は$GL(2)$のある保型表現に対応する」というものであった。この問題は極めて困難であったが，［4］（証明の修正はこの論文にある）において，２次のガロア表現は奇または偶に応じて，不定符号または定符号の四元数体上の$GL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$の表現となることがわかることにより問題解決の方針が明確となった。

そこで，［2］で述べられた四元数体係数の行列環上のゼータ関数の定義の仕方で，我々の証明したい特別なゼータ関数を定義した。［2］で証明された関数等式の証明の鍵となるのは，四元数体係数の行列環に関するテータ関数の変換公式である。しかし，この論文では，対応する変形されたテータ関数の変換公式は用いず，Dirichlet の$L$関数の関数等式を用いて，保型形式に対応する関数等式を証明する。

第１章では，［4］の定理の証明の修正と Langlands 予想について述べる。第２章では，$\mathbb{Q}$上奇な２次ガロア表現を明確にし，いくつかの関数等式を証明する。結果としてある保型形式との関係がわかる。第３章では，$\mathbb{Q}$上の定符号四元数体を具体的に構成する。第４章は，$\mathbb{Q}$上偶な２次ガロア表現の$L$関数に対応するマースカスプ形式を構成する。

## １．$\mathbb{Q}$上２次の奇なガロア表現

$K$を$\mathbb{Q}$上２次のガロア拡大体で，$K/\mathbb{Q}$のガロア表現$\rho$は奇$(\det\rho\,(\text{複素共役}) = -1)$とする。このとき，$\rho$は不定符号四元数体に自然に作用する。したがって，$B$が不定符号四元数体であれば，$B_K = B \otimes_{\mathbb{Q}} K$を考えることができる。$K/\mathbb{Q}$の判別式を$D$とする。$B = \left(\frac{N, -q}{\mathbb{Q}}\right)$を［3］で定義した不定符号四元数体とすると，次の Kronecker-Weber の定理の類似が成り立つ。

定理 1.1　$B = \left(\frac{N, -q}{\mathbb{Q}}\right)$とし，$(Nq, D) = 1$とする。そのとき，$K$で決まる自然数$m$に対して，

*　現代マネジメント学部　現代マネジメント学科

$N \equiv -1 (\mathrm{mod}\ m)$となる$N$をとると，$B_K$は$B_m$に含まれる。
証明　$K$は$\mathbb{Q}$上２次表現をもつガロア拡大体なので，$K/\mathbb{Q}$のガロア群$G$は$GL(2,\mathbb{Z})$の有限な部分群と１のベキ根からなるアーベル群によって構成される群と同型である。したがって，$G$は$(\mathbb{Z}/u\mathbb{Z})^*(u \in \mathbb{Z})$からなる有限部分群と$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(x \in \mathbb{Z}/v\mathbb{Z})$からなる有限部分群および１のベキ根からなるアーベル群によって構成される群$G_0$および$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$で生成される有限部分群からなる部分群となる。$G_0$はアーベル群だから，Kronecker-Weber の定理より，適当な自然数$m$に対して，$\mathbb{Q}$に１の$m$乗根を添加したガロア拡大体$K_0$に対するガロア群$Gal(K_0/\mathbb{Q})$は$G_0$を含む。今度は，$(Nq, D) = 1, N \equiv -1 (\mathrm{mod}\ m)$を満たす$N, q$に対して，不定符号四元数体$B = \left(\frac{N,-q}{\mathbb{Q}}\right)$を考えると，$B$の$m$等分体$B_m$に対するガロア群$Gal(B_m/B)$は$GL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$に同型だから，$Gal(B_m/B)$は$G_0$と$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$を含む。つまり，$Gal(B_m/B)$は$G$を含むことになる。したがって，$B_K$は$B_m$に含まれる。 (q.e.d.)

ここで，$\mathbb{Q}$上２次表現に関する Langlands 予想［1］について述べる。
Langlands 予想　$\rho$を$K/\mathbb{Q}$の２次のガロア表現であるとすると，

$$L(s,\rho) = \prod_{p:\text{素数}} \det\,(1 - p^{-s}\,\rho(\mathrm{Frob}_p))^{-1} \tag{1.1}$$

は適当な上半平面上の保型形式と対応する。
ここで，$\mathrm{Frob}_p$は$p$のみで決まる$Gal(K/\mathbb{Q})$の元である。

## ２．$\mathbb{Q}$上２次の奇なガロア表現に対応する$L$関数

この章では，(1.1) の$L$関数について$\mathbb{Q}$上２次の奇なガロア表現の場合を考える。定理１で述べたように，$K/\mathbb{Q}$のガロア表現$\rho$は$B_K/B$上の２次元表現とみなすことができ，$GL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$の元とみなすことができる。また，Langlands 予想にある$\mathrm{Frob}_p$を$\sigma_p$とおくと，素数$p$に対して，ガロア群の元$\sigma_p$は$SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$の元$A_p$によって以下のような三角行列を考えることができる。

$$\sigma_p = A_p \begin{pmatrix} a_p & * \\ 0 & d_p \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

ここで，$a_p, d_p$は$\sigma_p$の固有値であり，$\mathrm{mod}\ m$で決まる$\mathbb{Z}$の元である。同様に，素数$q \in GL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$に対しても$\sigma_q$を考えると，

$$\sigma_q = A_q \begin{pmatrix} a_q & * \\ 0 & d_q \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

を考えることができる。$p(\in \mathbb{Z}) \to \sigma_p$は準同型写像であるので，
$pq \to \sigma_p\sigma_q$なる対応が存在し，

（2.3）
$$
\begin{aligned}
\sigma_p\sigma_q &= A_p\begin{pmatrix} a_p & * \\ 0 & d_p \end{pmatrix} A_q\begin{pmatrix} a_q & * \\ 0 & d_q \end{pmatrix} \\
&= A_p\begin{pmatrix} a_p & * \\ 0 & d_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_q & * \\ 0 & d_q \end{pmatrix} A_q{}' \\
&= A_p\begin{pmatrix} a_pa_q & * \\ 0 & d_pd_q \end{pmatrix} A_q{}' \\
&= A_pA_q{}''\begin{pmatrix} a_pa_q & * \\ 0 & d_pd_q \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。ここで，$A_p, A_q, A_q{}', A_q{}''$は$SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$の元である。また，ゆえに，$n\left(\in \mathbb{Z}^{\times}\right) \to a_n, n\left(\in \mathbb{Z}^{\times}\right) \to d_n$は，いずれも$\mathbb{Z}^{\times}$から$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$への準同型写像であることがわかる。

そこで，$GL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$の表現として，上の対応から，$n\left(n \in \mathbb{Z}^{\times}\right) \to \chi_1(n), n\left(n \in \mathbb{Z}^{\times}\right) \to \chi_2(n)$を考えることができる。この写像は次の性質をもつ。
$\chi_i\colon \mathbb{Z}^{\times} \to G_m (i = 1,2)$は

（2.4）
$$\chi_i(n) \to \begin{cases} \chi_i(n)(n \bmod m) & (n, m) = 1 \\ 0 & (n, m) \neq 1 \end{cases}$$

となる。ここで，$G_m$は 1 の$m$乗根からなる群である。
注意.（2.4）の$\chi_i(n)$は，具体的には$\chi_i(n) = \varsigma^b$となる。ここで，$\varsigma$は 1 の原始$m$乗根で，$b \in \{1,2, \dots, \mathrm{m}-1\}$である。定理 1.1 の$m$を最小なものとしてとったとき，その$m$を導手ということにする。そのとき，（2.4）の$m_1, m_2$を$\chi_1, \chi_2$の導手とすると，$(m_1, m_2) = 1, m_1m_2 = m$であることがわかる。

上の$\mathbb{Z}^{\times}$から$G_m$への準同型写像$\chi_i(i = 1,2)$を用いて，Dirichlet の$L$関数を次のように定義する。

（2.5）
$$L(s, \chi_i) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - \chi_i(p)p^{-s})^{-1}$$

（2.5）で定義された原始的な$L$関数は，次の性質をもつ。
（ｉ）$\chi_i(n)$の値は 1 のベキ根の積であるので，（6.4）の$L$関数は$|\mathrm{Re}(s)| > 1$の範囲で絶対収束する。
（ii）（2.5）の$L$関数は全平面に有理型関数解析接続される。
（iii）（2.5）の$L$関数は次の関数等式をみたす。
$\chi_i$の導手を$\mathrm{m}_i$とし，

（2.6）
$$\Lambda(\chi_i, s) = \left(\frac{m_i}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma(s)L(\chi_i, s)$$

とすると，

（2.7）
$$\Lambda(\chi_i, s) = \mathrm{W}(\chi_i)\Lambda(\chi_i{}^{-1}, s)$$

をみたす。ここで，$W\left(\chi_i\right) = \dfrac{\tau(\chi_i)}{\sqrt{m_i}}$であり，$\tau\left(\chi_i\right) = \displaystyle\sum_{v=0}^{m_i-1} \chi_i(v)e^{2\pi vi/m_i}$である。

次に，$K/\mathbb{Q}$の奇なガロア表現$\rho$は，定理 1.1 にあるように不定符号四元数体$B$上の 2 次表

現として考えることができるので，$A = M_2(B)$とすると，ガロア表現$\rho$は$A$の可逆な元全体に含まれる。そこで, [2] の理論が適用できることとなる。四元数体のゼータ関数を考える。
（ i ）素数$p$がmの約数でない場合
$F_p$を$\mathbb{Q}_p$上四元数体または$M_2(\mathbb{Q}_p)$とし，$A_p = M_2(F_p)$とする。また，$G_p$を$A_p$の可逆な元とする。さらに，$D_p$を$A_p$の整なる元全体とする。今，$\psi_p$を$\begin{pmatrix} p^{d_1} & * \\ 0 & p^{d_2} \end{pmatrix}$からなる集合から$\mathbb{C}^*$への準同型写像であるとする。すなわち，$\rho_1{}', \rho_2{}'$を0でない複素数であるとして，

（2.8）
$$\psi_p = \left(\begin{pmatrix} p^{d_1} & * \\ 0 & p^{d_2} \end{pmatrix}\right) = \rho_1'^{d_1} \rho_2'^{d_2}$$

であるとする。そのとき，$\psi_p$から決まる$G_p$上の帯球関数$\omega_p$が存在し，局所ゼータ関数$\varsigma_p(s, \omega_p)$ように定義する。

（2.9）
$$\varsigma_p\left(s, \omega_p\right) = \int_{I(G_P)} V_p(x)^s \omega_p(x^{-1}) dx$$

ここで，$I(G_p) = G_p \cap D_p$であり，$V_p(x)$は$x$に応じて決まる$p$のべき乗である。

$\rho_i = \rho_i{}'^{-1} \rho^{2-i} (i = 1{,}2)$とおくと，

（2.10）
$$\varsigma_p(s, \omega_p) = (1 - \rho_1 p^{-2s})^{-1}(1 - \rho_2 p^{-2s})^{-1}$$

となることがわかっている。
（ ii ）素数$p$が$m_1$の約数である場合
（ i ）の議論で，準同型写像の部分を次のようにする。$\begin{pmatrix} p^{d_1} & * \\ 0 & p^{d_2} \end{pmatrix}$なる元全体は$G_p$の部分群であるが，それを$H_p$とする。$H_p$に含まれる部分群として，$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & p^{d_2} \end{pmatrix}$なる元全体を$H_{p,1}$とする。$H_{p,1}$は$H_p$の部分群であるが，$\psi_{p,1}$を

（2.11）
$$\psi_{p,1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & p^{d_2} \end{pmatrix}\right) = \rho_2'^{d_2}$$

で，$H_p - H_{p,1}$においては0であるとする。この$\psi_{p,1}$は 1 次表現であると考えてよいので，

（2.12）
$$\varsigma_p(s, \omega_{p,1}) = (1 - \rho_2 p^{-2s})^{-1}$$

となる。
（ iii ）素数$p$が$m_2$の約数である場合
（ ii ）と同様な議論によって，$H_p$に含まれる部分群として，$\begin{pmatrix} p^{d_1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$なる元全体を$H_{p,2}$とする。$H_{p,2}$は$H_p$の部分群であるが，$\psi_{p,2}$を

（2.13）
$$\psi_{p,1} = \left(\begin{pmatrix} p^{d_1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \rho_1'^{d_1}$$

とすると，

$$\varsigma_p(s, \omega_{p,2}) = (1 - \rho_1 p^{-2s})^{-1} \tag{2.14}$$

となる。
（iv）無限素点の場合
$A_\infty = M_2(\mathbb{R})$となるので，直行群と$\begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$なる三角行列の積を考えればよいので，

$$\psi_\infty \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2}$$

なる準同型写像を$\psi_\infty$とし，

$$\eta(s, \omega_\infty) = \int_0^\infty (t_1 t_2)^{2s} \exp\left[-\pi(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)\right] t_1^{-2} t_2^{-1}\, \pi dt_1 \pi dt_2 \pi dt_3 \tag{2.15}$$

とおき，$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$とすると，

$$\eta(s, \omega_\infty) = c \cdot (2\pi)^{-2s} \Gamma(s) \Gamma(s+1) \tag{2.16}$$

となる。ここで，$c$は適当な定数である。さらに，導手$m$や有限素点との関係を考慮すると，

$$\eta_0(s, \omega_\infty) = c \cdot m^{\frac{s}{2}} \pi^{-s} \Gamma(s/2)^2 \tag{2.17}$$

局所的な$L$関数から，大局的な関数$I(s, \omega_\infty)$を次のように定義できる。

$$I(s, \omega) = \eta_0(s, \omega_\infty) \prod_p \varsigma_p(s, \omega_p) \tag{2.18}$$

（2.18）で定義された関数$I(s, \omega)$の関数等式は，通常修正されたテータ関数を用いて証明されるが，ここでは全く別の方法で証明する。関数$I(s, \omega)$に対して，次の定理が成り立つ。

定理 2.1　（2.18）で定義された関数$I(s, \omega)$に対して，$I(s, \omega)$は次の関数等式をみたす。

$$I(s, \omega) = W(\chi_1) W(\chi_2) I(1 - s, \omega^{-1})$$

Dirichlet の$L$関数の類似の$L$関数について上で述べたことから，次の補題が成り立つ。

補題 2.1　（2.5）で定義された$L$関数に対して，$\Lambda(\chi_i, s) = \left(\frac{m_i}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma(s/2) \Gamma(\chi_i, s)$は，関数等式

$$\Lambda(\chi_i, s) = W(\chi_i) \Lambda\left(\chi_i^{-1}, s\right) \tag{2.19}$$

定理 2.1 の証明
$I(s, \omega) = \eta(s, \omega_\infty) \prod_p \varsigma_p\left(s, \omega_p\right) = c \cdot m^{\frac{s}{2}} \pi^{-s} \Gamma(s/2)^2 \prod_p \varsigma_p\left(s, \omega_p\right)$ であり，
$\rho_1' = \chi_1^{-1} \frac{1}{p}, \rho_2' = \chi_2^{-1}$とおくことにより，$\prod_p \varsigma_p(\mathrm{s}, \omega_p) = \mathrm{L}(s, \chi_1) \mathrm{L}(s, \chi_2)$となり，$m = m_1 m_2$であるので，補題 2.1 を用いると，

（2.20）
$$\left(\frac{\sqrt{m}}{\pi}\right)^s \Gamma(s/2)\Gamma(s/2)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{m}}{\pi}\right)^{1-s}\Gamma(1-s/2)\Gamma(1-s/2)W(\chi_1)W(\chi_2)L(1-s,\chi_1^{-1})L(1-s,\chi_2^{-1})$$

　また，ガンマ関数$\Gamma(s)$の公式

（2.21）
$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1/2}}{(2\pi)^{1/2}}\Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac{1}{2})$$

を用いると，

（2.22）
$$\left(\frac{\sqrt{m}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)=W(\chi_1)W(\chi_2)\left(\frac{\sqrt{m}}{2\pi}\right)^{1-s}\Gamma(1-s)L(1-s,\chi_1^{-1})L(1-s,\chi_2^{-1})$$

となることが証明できる。　(q.e.d.)

定理 2.1 の系　（1.1）で定義された$L(s,\rho)=\prod_{p:素数}\det\,(1-p^{-s}p(\mathrm{Frob}_p))^{-1}$に対して，

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)L(s,\rho)=\frac{\tau(\chi_1)\tau(\chi_2)}{\sqrt{m}}\left(\frac{\sqrt{m}}{2\pi}\right)^{1-s}\Gamma(1-s)L(1-s,\rho^{-1})$$

が成り立つ。

証明　$L(s,\rho)=\prod_p \varsigma_p(s,\omega_p), W(\chi_i)=\dfrac{\tau(\chi_i)}{\sqrt{m_i}}, m=m_1m_2$ であるので，定理 2.1 より，定理 2.1 の系は証明された。　(q.e.d.)

　保型形式との対応を見るために，$\varphi$を導手$m_\varphi$が$m$と互いに素な任意の原始的な Dirichlet 指標を考える。$L(s,\rho)$は$\mathrm{Re}(s)$が適当な定数よりも大きければ絶対収束することがわかっているが，その Dirichlet 級数を

（2.23）
$$L(s,\rho)=L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

であるとする。すぐにわかるように，適当な実数$\sigma$に対して，$a_n=O(n^\sigma)$である。そこで，（2.23）の Dirichlet 級数に対して，上半平面$H$上で広義一様収束する次のような関数$f_\rho(z)(z\in H)$が定義できる。

（2.24）
$$f_\rho(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi i z}\quad (z\in H)$$

　今，$L(s,\rho)=L(s,f_\rho)$と置き換えて，

（2.25）
$$\Lambda(s,f_\rho)=2\left(\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\right)^{-s}\Gamma(s)L(s,f_\rho)$$

とおく。また，任意のDirichlet指標$\varphi$に対して，

(2.26)
$$L(s, f_\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)a_n}{n^s}$$

とおく。もちろんこの級数$L(s, f_\rho, \varphi)$は$L(s, f_\rho)$と同じ領域で絶対収束する。$L(s, f_\rho, \varphi)$に対して，

(2.27)
$$\Lambda(s, f_\rho, \varphi) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\right)^{-s} \Gamma(s)L(, f_\rho, \varphi)$$

とおく。さらに,上半平面$H$上で広義一様収束する次のような関数$g_\rho(z)(z \in H)$を定義する。

(2.28)
$$g_\rho(\mathrm{z}) = i^{-1} \frac{\tau(\chi_1)\tau(\chi_2)}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e^{2\pi i z} \quad (z \in H)$$

とおく。そのとき，定理2.2より，次の命題が成り立つ。

命題2.1　$\Lambda(s, f_\rho)$は全平面上正則で任意の垂直な帯領域で誘拐な関数に解析接続され，

$$\Lambda(s, f_\rho) = i\Lambda(1 - s, g_\rho)$$

をみたす。

　また，次の定理が成り立つ。

定理2.2　$\Lambda(s, f_\rho, \varphi)$は全平面上正則で任意の垂直な帯領域で誘拐な関数に解析接続され，

$$\Lambda(s, f_\rho, \varphi) = i \frac{\tau(\varphi)}{\tau(\overline{\varphi})} \Lambda(1 - s, g_\rho, \overline{\varphi})$$

をみたす。

証明　関数等式以外はすでによくわかっているので，関数等式の部分を証明する。$\chi_1, \chi_2$の導手$m_1, m_2$とDirichlet指標$\varphi$の導手$m_\varphi$は互いに素であるので，
$\tau(\varphi\chi_1) = \tau(\varphi)\tau(\varphi\chi_1), \tau(\varphi\chi_2) = \tau(\varphi)\tau(\chi_2)$であり，$\tau(\varphi)\tau(\overline{\varphi}) = m_\varphi{}^2$である。したがって，

$$\frac{\tau(\varphi)^2}{m_\varphi{}^2} = \frac{\tau(\varphi)^2 \cdot \tau(\overline{\varphi})}{m_\varphi{}^2 \cdot \tau(\overline{\varphi})} = \frac{\tau(\varphi)}{\tau(\overline{\varphi})}$$

となるので，定理2.2は成り立つ。 (q.e.d.)

定理 2.3　$\mathbb{Q}$上2次の奇なガロア表現$\rho$から定義されるゼータ関数は，重さ1の$SL(2, \mathbb{Z})$に対するカスプ形式に対応する。

証明　命題2.1と命題2.2にヴェイユの逆定理を適用することによって，(2.24) の関数は重さ1の$SL(2, \mathbb{Z})$に対するカスプ形式になる。 (q.e.d.)

## ３．有理数体上定符号四元数体の構成

　ここでは，有理数体上定符号四元数体$B = \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathbb{Q}}\right)$を構成するが，それは［3］で構成した

有理数体上不定符号四元数体を修正したものを構成する。そこで，$p_1, p_2, \ldots, p_r$を相異なる偶数個の素数とする。$N = -p_1 p_2 \ldots p_r$とおき，平方剰余記号$\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)$に対して，

（3.1） $\left(\frac{-q}{p_i}\right) = -1$，（$N$を割る2でないすべての素数$p_i$に対して），$-\varepsilon q \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 8)$

となるように，素数$q$を適当に選ぶ。このような素数はディリクレの素数定理により存在することが知られている。すると，ヒルベルト記号$(\bullet,\bullet)_p$，（$p$は素数）に対して，

$$(N, -q)_{p_i} = \left(\frac{-q}{p_i}\right) = -1, (i = 1,2, \ldots, r), (p_i \neq 2)$$

（3.2）
$$(N, -\varepsilon q)_2 = (-1)^{\frac{(-\varepsilon q)^2 - 1}{8} + \frac{(N-1)(-\varepsilon q - 1)}{4}} = -1, (2|N),$$

$$(N, -\varepsilon q)_2 = (-1)^{\frac{(N-1)(-\varepsilon q - 1)}{4}} = -1, (2|N),$$

$$(N, -\varepsilon q)_p = 1, \left(p \middle| 2N_q\right), (N, -q)_\infty = -1, (N, -q)_q = -1$$

となる。ここで，最後の$(N, -q)_q = -1$ はヒルベルトの積公式$\prod_p (N, -q)_q = 1$，（$p$ はすべての素数を動く）による。

（3.1）より$\left(\frac{-q}{N}\right) = -1$となることと，$(N, -q)_\infty = 1$より，$\left(\frac{N, -q}{\mathbb{Q}}\right)$は定符号四元数体であることがわかる。また，上のことから$\left(\frac{N, -q}{\mathbb{Q}}\right)$の判別式は$Nq$である。

## 4．$\mathbb{Q}$上２次の偶なガロア表現に対応する$L$関数

２章では$\mathbb{Q}$上２次の奇なガロア表現に対応する保型形式を構成したが，［2］では定符号四元数体のゼータ関数についても述べられているので，［2］のゼータ関数を使って$\mathbb{Q}$上２次の偶なガロア表現に対応するマース形式を構成する。

まず，$\mathbb{Q}$上２次の偶なガロア表現$\rho$を，第１章で述べたことと対比して，定符号四元数体上の表現としてとらえる。$K$を$\mathbb{Q}$上２次のガロア拡大体で，$K/\mathbb{Q}$のガロア表現$\rho$は偶（$\det \rho$(複素共役) $= 1$）とする。このとき，$\rho$は定符号四元数体に自然に作用する。したがって，$B$が定符号四元数体であれば，$B_K = B \otimes_{\mathbb{Q}} K$を考えることができる。$K/\mathbb{Q}$の判別式を$D$とする。$B = \left(\frac{N, -q}{\mathbb{Q}}\right)$を第３章で定義した定符号四元数体とすると，定理 1.1 と全く同じ証明によって，次の Kronecker-Weber の定理の類似が成り立つ。

定理 4.1 $B = \left(\frac{N, -q}{\mathbb{Q}}\right)$とし，$(Nq, D) = 1$とする。そのとき，$K$で決まる自然数$m$に対して，$N \equiv -1 (\mathrm{mod}\ m)$となる$N$をとると，$B_K$は$B_m$に含まれる。

$K/\mathbb{Q}$の偶なガロア表現$\rho$は，定理 4.1 にあるように定符号四元数体$B$上の２次表現として考えることができるので，$A = M_2(B)$とすると，ガロア表現$\rho$は$A$の可逆な元全体に含まれる。これで第２章と同じ議論が展開できる。違うのは，無限素点のみであるので，無限素点が四元数体であることを考慮しながら四元数体のゼータ関数を構成する。

無限素点での$A_\infty$は四元数体係数の$2 \times 2$行列となる。［2］によると，対称ユニタリー群と

$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$なる群の積を考えればよいので，

$$\psi_\infty\left(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\right) = t_1^{2\lambda_1} t_2^{2\lambda_2}$$

なる準同型写像を$\psi_\infty$とすると，

(4.1) $$\eta(s, \omega_\infty) = c \cdot (2\pi)^{-8s+\sum \lambda_i{}'} \Gamma(4s + \lambda_1)\Gamma(4s + \lambda_2)$$

となる。ここで，$c$は適当な定数であり，$\lambda_1 = -\lambda_1{}' - 2 + 2i$である。$\lambda_1 = \varepsilon + \frac{r}{2}, \lambda_2 = \varepsilon - \frac{r}{2}$として，導手$m$や有限素点との関係を考慮すると，

(4.2) $$\eta_0(s, \omega_\infty) = c \cdot m^s (\pi)^{-s} \Gamma(s + \varepsilon + r / 2)\Gamma(s + \varepsilon - r / 2)$$

ここで，$r$は任意の実数であり，$\varepsilon = 0{,}1$である。

有限素点の部分は，第２章の場合と同様に，

(4.3) $$\prod_p \varsigma_p(s, \omega_p) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$$

となるようにする。

局所的な$L$関数から，大局的な関数$I(s, \omega)$を次のように定義できる。

(4.4) $$I(s, \omega) = \eta_0(s, \omega_\infty) \prod_p \varsigma_p(s, \omega_p)$$

関数$I(s, \omega)$は次のようになる。

(4.5) $$I(s, \omega) = c \cdot m^s (\pi)^{-s} \Gamma(s + r / 2)\Gamma(s - r / 2)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$$

ここで，次の$K$ベッセル関数を定義する。

(4.6) $$K_s(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y\frac{t+t^{-1}-1}{2}} t^s \frac{dt}{t}$$

$K$ベッセル関数を使った次のフーリエ級数を考える。

(4.7) $$u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} a(n)\sqrt{y}\, K_{ir}(2\pi n y) e^{2\pi i n x}$$

以上の準備より，次の定理を得る。

定理 4.1　$\mathbb{Q}$上２次の偶なガロア表現$\rho$から定義されるゼータ関数は，$SL(2, \mathbb{Z})$に対するマースカスプ形式$u(z)$に対応する。

証明　第２章と同様な議論とマースの逆定理により，定理 4.1 を得る。

## おわりに

この論文では，$\mathbb{Q}$上２次のガロア表現の$L$関数に対応する保型形式との関係を述べたが，

3次以上のガロア表現の$L$関数に対応する保型形式では，保型形式の逆定理が存在しないので，全く別なアプローチを考察すべきである。

## 参考文献

［1］R. P, Langlands: Problems in the theory of automorphic forms, Springer Lecture Notes in Math. 170 (1970) 18–61

［2］T. tamagawa: On the $\zeta$-Functions of a Division Algebra. Anaals of Math. 77 (1963) 387–405

［3］吉本明宣：「有理数体上の四元数体のガロア拡大」『社会とマネジメント』12（2015），椙山女学園大学現代マネジメント学部，67–76

［4］吉本明宣：「$\mathbb{Q}$上ランク２ガロア拡大体に関する Kronecker-Weber の定理の類似について」『社会とマネジメント』18（2021），椙山女学園大学現代マネジメント学部，111–118