

# 行列変数の解析関数について

吉本明宣 *Akinori Yoshimoto*

## Abstract

The purpose of this paper is to state about the analytic functions of a matrix variable which has not been studied enough, and try to apply that to mathematical fields except linear algebra that has been still applied much. To realize them, we extended some facts which were well known in complex function theory of a complex variable to the case of analytic functions of a matrix variable. Unfortunately we couldn't describe their applications, but the importance is the fact that non abelian extensions of the basic field are obtained by division points of the algebraic variety defined by algebraic equations of a matrix variable.

キーワード：☐行列変数の解析関数    ☐擬正則関数    ☐リゾルベント  
☐右解析的    ☐右テーラー展開    ☐エアロ関数  
☐一致の定理    ☐断面    ☐スペクトラム

## はじめに

行列値関数の歴史は比較的早く、[1]においてすでに現在知られている多くのことがまとめられている。また、[2], [3]において、行列値関数の基礎的な事や応用がまとめられている。しかしながら、この方面での基本的な教科書はなく、専門的な研究も必ずしも十分進んでいるとは言えない状況である。また、従来の研究では、行列値関数は線形代数の側からのアプローチにより研究がなされており、応用も線型方程式の解法などに使われている。そうした状況を踏まえ、この論文においては、行列値関数を純粋に複素関数論的な立場から捉え、行列値関数を複素解析的な関数の拡張として考察する。ただし、ここでは議論を易しくするため $2 \times 2$ 行列のみを対象とする。通常の複素関数論では、微分可能という概念と解析的という概念が同値になるが、行列変数( $2 \times 2$ 行列以上)の関数では、解析的(厳密には、右解析的)と言う概念が、微分可能という概念より狭く、より重要になる。

具体的には、複素関数論で成り立つ美しい定理の類似を考え、できるだけ制限を付けないで成り立つ事実を考察する。第1節では、現在知られている $2 \times 2$ 行列に関す

る基本的な事実をまとめる。第2節では、微分可能という概念が、複素関数から行列変数の関数へとどのように拡張されるのかを考察する。第3節では、解析的という概念が、複素関数からエアロ関数（行列変数の解析関数）へと拡張される事を考察していく。

## 1 | 2×2 行列に関する基本的な事実

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$  に対し、そのノルムを

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j=1}^2 |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義する。このノルムはベクトル空間  $M_2(\mathbb{C})$  のノルムになっている事がわかる。

すなわち、

$$\begin{aligned} \|aA\| &= |a|\|A\|, (a \in \mathbb{C}), \\ \|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\|, \\ \|A\| &\geq 0, (\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O) \end{aligned}$$

が成り立っている。このことから、2点  $A, B (\in M_2(\mathbb{C}))$  の距離  $d(A, B)$  を

$$d(A, B) = \|A - B\|$$

で定義すれば、 $M_2(\mathbb{C})$  は距離空間となる。

また、 $\mathbb{C}^2$  の元  $x = {}^t(x_1, x_2)$  に対して、

$$\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義するとき、次の補題が成り立つ。

**補題1.1** 任意の  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ ,  $x \in \mathbb{C}^2$  に対し、次の不等式が成り立つ。

- (1)  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$
- (2)  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

**証明** (1)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  とすれば、 $Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$  となる。シュワルツ

の不等式を用いながら、

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \left( |a_1x_1 + a_2x_2|^2 + |a_3x_1 + a_4x_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left( |a_1|^2 + |a_3|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x_1| + \left( |a_2|^2 + |a_4|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x_2| \\
&\leq \left( |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( |x_1|^2 + |x_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A\| \|x\|
\end{aligned}$$

したがって、(1) を証明できた。

(2)  $B$  の列ベクトルを  $\widehat{b}_1, \widehat{b}_2$  とすれば、 $AB = (A\widehat{b}_1, A\widehat{b}_2)$  となる。(1) を用いると、

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 &= \sum_{i=1}^2 \|A\widehat{b}_i\|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^2 \|A\|^2 \|\widehat{b}_i\|^2 \\
&= \|A\|^2 \|B\|^2
\end{aligned}$$

したがって、(2) を証明できた。

(q. e. d)

**補題1.1の系**  $A$  のスペクトラム  $\sigma(A)$  に対して、

$$\sup |\sigma(A)| \leq \|A\|$$

**証明** 補題1.1の(1)とスペクトラムの定義より、 $\sup |\sigma(A)| \leq \|A\|$  が成り立つ。

(q. e. d)

点列  $(A_n)_{n \in N}$  が  $A_0$  に収束するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A_0\| = 0$$

となることとする。このことを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0$$

で表す。また、 $M_2(\mathbb{C})$  の元を項とする級数  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  に対し、その部分和

$$S_k = \sum_{n=1}^k A_n$$

の作る点列  $(S_k)_{k \in N}$  が  $S$  に収束するとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  は  $S$  に収束するといい、

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

で表す。

## 2 | 擬正則関数

ここからは、後の議論のために、値として  $M_2(\mathbb{C})$  の元を取る関数を考察する。  
今、

$$z \mapsto A(z)$$

を複素数体  $\mathbb{C}$  から  $M_2(\mathbb{C})$  への関数とする。 $A(z)$  が  $z=z_0$  で連続であるとは、 $z_0$  に収束する任意の点列  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して、ある  $M_2(\mathbb{C})$  の点  $A(z_0)$  が存在して、

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} A(z_n) = A(z_0)$$

となることをいう。

また、 $A(z)$  が  $z=z_0$  で正則であるとは、 $z_0$  に収束する任意の点列  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して、

$$(2.1) \quad \lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{A(z_n) - A(z_0)}{z_n - z_0}$$

が存在することをいう。極限值 (2.1) を  $A'(z_0)$  と表すことにする。

行列値関数  $A(z)$  は複素数値関数と同様な性質を持つことは容易に想像でき、またよく知られてもいるので、証明なしで以下の定理を引用する。

**定理2.1** (Cauchy の積分定理) 正則関数  $A(z)$  の定義領域  $D$  内のジョルダン閉曲線  $\Omega$  の内部がすべて  $D$  の点からなるならば、

$$\int_{\Omega} A(z) dz = O, \quad (O \text{ は } 2 \text{ 次の零行列})$$

また、 $A^{(0)}(z) = A(z)$ 、1 以上の整数に対して、 $z=z_0$  における  $k$  回微分を  $A^{(k)}(z_0)$  とすると、次の定理が成り立つ。

**定理2.2** 定理2.1 と同様の仮定の下で、

$$(2.2) \quad A^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{A(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz, \quad (k=0,1,2,\dots)$$

領域  $D$  内において、高々極を例外とすれば  $D$  内で正則な関数  $A(z)$  を有理型関数であるという。複素数値関数と同様に、有理型関数  $A(z)$  は次のようなローラン展開をもつ事が証明できる。

**定理2.3** 領域  $D: 0 \leq R_1 < |z-z_0| < R_2 \leq \infty$  で  $A(z)$  は正則であるとすれば、 $D$  において、

$$(2.3) \quad A(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} A_k (z - z_0)^k$$

と一意的に展開できる。また、 $A_k$  は次のように表示できる。

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{A(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz, \quad (k \text{ は整数})$$

ただし、 $r$  は  $R_1 < r < R_2$  なる任意の正数である。

$A(z)$  のローラン展開 (2.3) において、適当な整数  $n$  が存在して、

$$\begin{cases} A_n \neq 0 \\ A_k = 0, (k < n) \end{cases}$$

となるが、 $n$  が負の整数であるとき、 $A(z)$  は  $n$  位の極をもつという。また、 $A_{-1}$  を  $z = z_0$  における留数とよぶ。

後に使用するために、次の補題を考える。

**補題2.1**  $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$  を  $M_2(\mathbb{C})$  の任意の元とし、任意の正の整数  $k$  に対して、行列値関数  $A(z)$  を

$$z \mapsto A_k(z) = \begin{pmatrix} z + z_1 & z_2 \\ z_3 & z + z_4 \end{pmatrix}^k$$

とする。そのとき、

$$A'_k(z) = k A_{k-1}(z)$$

証明  $A_k(z)$  と  $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$  は可換であるので、

$$\begin{aligned} A'_k(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} z + h + z_1 & z_2 \\ z_3 & z + h + z_4 \end{pmatrix}^k - \begin{pmatrix} z + z_1 & z_2 \\ z_3 & z + z_4 \end{pmatrix}^k}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z + z_1 & z_2 \\ z_3 & z + z_4 \end{pmatrix} \right)^k - \begin{pmatrix} z + z_1 & z_2 \\ z_3 & z + z_4 \end{pmatrix}^k}{h} \\ &= k A_{k-1}(z) \end{aligned}$$

となる。

(q. e. d)

**補題2.2**  $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$  を  $M_2(\mathbb{C})$  の任意の元とし、任意の正の整数  $k$  に対して、行列値関数  ${}_k A(z)$  を

$$z \mapsto {}_k A(z) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 + z \\ z_3 + z & z_4 \end{pmatrix}^k$$

とする。そのとき、

$${}_k A'(z) = \sum_{\substack{l+m=k-1 \\ l,m \geq 0}} {}_l A(z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_m A(z)$$

証明

$$\begin{aligned} {}_k A'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 + z + h \\ z_3 + z + h & z_4 \end{pmatrix}^k - \begin{pmatrix} z_1 & z_2 + z \\ z_3 + z & z_4 \end{pmatrix}^k}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \begin{pmatrix} z_1 & z_2 + z \\ z_3 + z & z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} \right)^k - \begin{pmatrix} z_1 & z_2 + z \\ z_3 + z & z_4 \end{pmatrix}^k}{h} \\ &= \sum_{\substack{l+m=k-1 \\ l,m \geq 0}} {}_l A(z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_m A(z) \end{aligned}$$

となる。

(q. e. d)

$D$  を  $M_2(\mathbb{C})$  内のある領域とし、 $X_0$  を  $D$  の内部のある点として、

$$D_{X_0} = \left\{ X \in D \mid X = X_0 + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, (z \in \mathbb{C}) \right\}$$

と定義する。 $D$  内の点の集合  $D_{X_0}$  を  $X_0$  に付随した  $D$  の断面とよぶ。そこで、 $D$  から  $M_2(\mathbb{C})$  への関数  $f(X)$  が  $D$  で擬正則であるとは、各  $X_0$  に対して、 $D_{X_0}$  上の  $z$  の複素関数  $f\left(X_0 + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)$  が正則であることをいい、そのような  $D$  上の連続関数  $f(X)$  は  $D$  の擬正則関数であるということにする。また、各  $D_{X_0}$  上の  $X_0$  における  $f(X_0 + zI)$  の微分係数  $f'(X_0)$  を  $(df)(X_0)$  でも表すことにする。そのとき、直ちに次の命題が成り立つ。

**命題2.1**  $f(X), g(X)$  を  $M_2(\mathbb{C})$  のある領域  $D$  で定義された擬正則関数とすると、次の性質が成り立つ。

- (1)  $d(f+g)(X) = (df)(X) + (dg)(X)$
- (2)  $\alpha$  を  $M_2(\mathbb{C})$  の元とすると、 $d(\alpha f)(X) = \alpha(df)(X)$
- (3)  $d(fg)(X) = (df)(X)g(X) + f(X)(dg)(X)$

$A$  を  $M_2(\mathbb{C})$  の元として、 $\mathbb{C}$  から  $M_2(\mathbb{C})$  への関数

$$(2.4) \quad z \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{A}{z} \right)^m$$

を考える。この級数は、 $|z| > \|A\|$  であるとき絶対収束し、

$$(2.5) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{A}{z} \right)^m = (I - z^{-1}A)^{-1}$$

が成り立つ。したがって、

$$(2.6) \quad R(z, A) = z^{-1}(I - z^{-1}A)^{-1} = (zI - A)^{-1}$$

と定義すると、(2.6) より、

$$(2.7) \quad R(z, A) = \frac{I}{z} + \frac{A}{z^2} + \cdots + \frac{A^m}{z^{m+1}} + \cdots$$

が  $|z| > \|A\|$  において成り立つ。ゆえに、 $R(z, A)$  は  $z = \infty$  で正則で、(2.7) は  $z = \infty$  におけるテーラー展開となる。 $R(z, A)$  を  $A$  のリゾルベントという。

今、関数  $X \mapsto f(X)$  は  $M_2(\mathbb{C})$  内のある領域  $D$  で定義された擬正則関数であるとする。

$D$  内のある点  $X_0 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$  に対して、

$$U_{X_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid X_0 + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \in D \right\}$$

とおくと、上の関数を使って  $U_{X_0}$  から  $M_2(\mathbb{C})$  への関数

$$(2.8) \quad z \mapsto X_0 + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto f\left(X_0 + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)$$

を構成できる。この関数を

$$(2.9) \quad z \mapsto f_{X_0}(z)$$

と定義する。

擬正則関数の定義より、 $f_{X_0}(z)$  は  $z = 0$  で正則な  $\mathbb{C}$  から  $M_2(\mathbb{C})$  への関数である。従って、定理2.3より、適当な正の整数  $R$  に対して、 $f_{X_0}(z)$  は  $|z| < R$  で次のテーラー展開をもつ。

$$(2.10) \quad f_{X_0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

このように、 $M_2(\mathbb{C})$  内のある領域  $D$  で定義された擬正則関数  $f(X)$  から  $D$  の断面

$D_{X_0}$  に対応する  $U_{X_0}$  上の正則関数  $f_{X_0}(z)$  を構成できる。逆に、 $D$  内の 1 点  $X_0$  に付随した断面  $D_{X_0}$  に対応する  $U_{X_0}$  で (2.10) のようなテイラー展開をもつ正則関数  $f_{X_0}(z)$  が存在したとする。

$$D(X_0, r) = \{X \in D \mid \|X - X_0\| < r\}$$

とおくとき、次の定理が成り立つ。

**定理 2.4**  $f_{X_0}(z)$  を  $M_2(\mathbb{C})$  内のある領域ある領域  $D$  内の 1 点  $X_0$  に付随した断面  $D_{X_0}$  に対応する  $U_{X_0}$  上の正則関数とし、(2.10) のテーラー展開  $f_{X_0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$  をもつ  $R$  に対して、 $0 < r < R$  なる  $r$  をとる。 $X \in D$  は  $D(X_0, r)$  内にあるとし、 $C_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$  とおく。そのとき、

$$(2.11) \quad f(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f_{X_0}(z) R(z, X - X_0) dz$$

は  $D(X_0, r)$  内の  $X$  において絶対収束し、

$$(2.12) \quad f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (X - X_0)^k$$

となる。つまり、 $f(X)$  は  $f_{X_0}(z) = f(X_0 + z)$  の  $z$  に  $X - X_0$  を代入したものになっている。さらに、この関数は  $D(X_0, r)$  内の  $X$  に付随した断面  $D_X$  に対応する  $U_X$  上で微分可能な擬正則関数となり、

$$(df)(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k (X - X_0)^{k-1}$$

**証明** 仮定より、 $\|X - X_0\| < r$  であり、 $C_0$  上では、 $|z| > \|X - X_0\|$  であるので、(2.7) の下で述べたことから、 $R(z, X - X_0)$  は  $C_0$  上で絶対収束する。また、補題 1.1 の系より、 $\sup |\sigma(X - X_0)| \leq \|X - X_0\|$  であるから、積分 (2.11) は定理の仮定を満たす  $r$  の取り方に寄らず一定の値をとることがわかる。さらに、 $C_0$  上では  $f_{X_0}(z)$  も絶対収束するので、(2.11) は項別積分可能となり、

$$(2.13) \quad (X - X_0)^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} z^k R(z, X - X_0) dz$$

であることに注意すれば、

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (X - X_0)^k$$

であることがわかる。また、補題 2.1 と  $\sum_{k=1}^{\infty} k A_k (X - X_0)^{k-1}$  が  $D(X_0, r)$  内の  $X$  において絶対収束することから、

$$(df)(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k (X - X_0)^{k-1}$$

となる。

(q. e. d)



注意 定理2.4から、(2.11)で定義される  $D(X_0, r)$  上の関数は擬正則関数となるが、逆は必ずしも正しくない。たとえば、 $A_{X_0}(z)$  を  $D_{X_0}$  上の定数でない正則関数とする。

$D(X_0, r)$  内の任意の点  $X_{z', w, w'} = X_0 + \begin{pmatrix} z' & w \\ w' & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(z', w, w' \in \mathbb{C})$ , に付随した断面  $D_{X_{z', w, w'}}$  によって  $D(X_0, r)$  は埋め尽くされるので、それらの点の  $D(X_0, r)$  内の断面上の正則関数を

$$A_{X_{z', w, w'}}(z) = A_{X_0}(z)$$

と定義すると、 $f(X) = \{A_X(z) | X = X_{z', w, w'} \in D(X_0, r)\}$  は  $D(X_0, r)$  上の擬正則関数であるが、積分(2.11)のように表すことができない。そのことを簡単に述べると次のようになる。

(2.11)で表される関数は、(2.12)のように右テーラー展開され、 $D(X_0, r)$  内の各点  $X$  に付随した断面  $D_X$  で微分可能となる。後の定理3.5で示されるように、

$$f\left(X_0 + \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}\right), \left(w \in \mathbb{C}, X_0 + \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix} \in D(X_0, r)\right) \text{ は } w \text{ の正則関数であり、定義から}$$

$$f\left(X_0 + \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}\right) = f(X_0) \text{ となる。後の定理2.5より } f(X) \text{ は } D(X_0, r) \text{ 上で定数と}$$

なるが、これは仮定に反する。

定理2.4の(2.12)のような展開を持つ関数を右解析的であるといい、そのような展開を右テーラー展開ということにする。

**定理2.5**  $f(X)$  を(2.11)によって定義された  $D(X_0, r)$  上の関数とする。断面  $D_{X_0}$  上の  $D(X_0, r)$  内の無限個の点  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して、 $f(X_n) = 0$  であるならば、 $f(X)$  は  $D(X_0, r)$  上で恒等的に  $0$  である。

証明 断面  $D_{X_0}$  上の無限個の点  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して、 $f(X_n) = 0$  であるので、複素正則関数の一致の定理より、 $f(X)$  は断面  $D_{X_0}$  上で恒等的に  $0$  である。また、定理2.4より、 $f(X)$  は(2.12)のような右テーラー展開を持つので、 $f(X)$  は  $D(X_0, r)$  上で恒等的に  $0$  である。  
(q. e. d)

### 3 | エアロ関数

この節において、擬正則関数よりも少し強い概念を導入する。 $M_2(\mathbb{C})$  内のある1点  $X_0$  に対して、 $f_{X_0}(z)$  は複素平面  $\mathbb{C}$  内の有界領域  $D_0$  上の正則関数であるとする。さらに、 $M_2(\mathbb{C})$  内の領域  $D$  を次のように定義する。

$$D = \{X \in M_2(\mathbb{C}) | \sigma(X - X_0) \in D_0\},$$

ここで、 $\sigma(X)$  は  $X$  の固有値である。 $C_0$  を領域  $D_0$  内または  $D_0$  の境界上のジョルダン閉曲線で領域  $D$  内の元  $X$  に対して、固有値  $\sigma(X - X_0)$  を全て含むものとする。そのとき、領域  $D$  上の関数  $f(X)$  を次のように定義する。

$$(3.1) \quad f(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f_{X_0}(z) R(z, X - X_0) dz$$

このように定義された関数  $f(X)$  を領域  $D$  上のエアロ関数と呼ぶことにする。

注意 (3.1) のエアロ関数  $f(X)$  の定義は  $f_{X_0}(z)$  の正則性に依存しており、 $f(X)$  の定義領域  $D$  も  $f_{X_0}(z)$  の定義領域から決まる。

**命題3.1** (3.1) で定義された領域  $D$  上のエアロ関数  $f(X)$  は  $D$  上の擬正則関数である。  
証明 (2.7) およびその下の注意により、 $R(z, X - X_0)$  は曲線  $C_0$  上で絶対収束する。したがって、(3.1) で定義された関数  $f(X)$  は、正則関数  $f_{X_0}(z)$  の最大絶対値の原理から、領域  $D$  上で定義された関数となる。また、補題2.1より、 $R(z, X - X_0)$  は  $X$  の擬正則関数であることがわかるから、 $D$  内の各点  $X_1$  に対する断面  $D_{X_1}$  上で  $f(X)$  は正則である。  
(q. e. d)

さて、今度は別の方法でエアロ関数  $f(X)$  の定義領域  $D$  上の関数を定義しよう。 $D$  内の各点  $X_1$  に対して、(2.8) の上で定義された  $U_{X_1}$  上の関数  $f_{X_1}(z) = f\left(X_1 + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)$ , ( $z \in U_{X_1}$ ) を考える。 $f_{X_1}(z)$  は、命題3.1より  $U_{X_1}$  上の正則関数だから、そのテーラー展開を用いて積分 (2.11) によって定義される関数を  $g_{X_1}(X)$  とする。ただし、その定義領域は領域  $D$  に含まれるようにとるものとする。定理2.4によれば、(2.10) なる  $f(z)$  のフーリエ展開に対して、 $g_{X_1}(X)$  は (2.12) のような右解析的な関数として表わされる。仮に  $D$  内の異なる2点  $X_1, X_2$  に対して  $g_{X_1}(X), g_{X_2}(X)$  の定義領域  $D_1, D_2$  が共通部分を持つならば、定理2.5によって、それらは等しい関数となる。同様にして、 $D_1 \cup D_2$  の外にある領域  $D$  内の点  $X_3$  に対して、 $g_{X_3}(X)$  を考えることによって関数を延長することができる。領域  $D$  は有界であったので、 $D$  内の有限個の点  $X_1, X_2, \dots, X_n$  による  $D$  上の関数  $g(X)$  が定義できる。ここで、 $D$  上の関数  $g(X)$  は点  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の取り方によらず一意的に決まることに注意する。

**命題3.2** 領域  $D$  上の関数として  $f(X) = g(X)$  である。

証明  $g(X)$  を定義する点達  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の中に  $f(X)$  を定義した  $X_0$  が含まれているとしても一般性を失わないので、 $X_0$  はその中に入っているものとする。 $f_{X_0}(z)$  から積分 (2.11) によって定義される関数を  $g_{X_0}(X)$  とするとき、 $g(X)$  は  $g_{X_0}(X)$  の延長になっているが、他方  $f(X)$  も  $g_{X_0}(X)$  の延長になっているので、 $g(X)$  の一意性から、 $f(X) = g(X)$  である。  
(q. e. d)

注意 命題3.2によれば、エアロ関数の定義 (2.14) は  $X_0$  に依らないことがわかる。

ここまでくれば複素正則関数の場合と類似の次の定理が証明できる。

**定理3.1**  $M_2(\mathbb{C})$  内の有界領域  $D$  上の関数  $f(X)$  に関して、次の (i), (ii) は同値である。

(i)  $f(X)$  は  $D$  上のエアロ関数である。

(ii)  $f(X)$  は  $D$  内の各点  $X_0$  で右解析的である。

証明 (i)  $\Rightarrow$  (ii) 命題3.2より、 $f(X)$  は右解析的な関数より構成される関数  $g(X)$  に等しい。 $D$  内の任意の点  $X_0$  は  $g(X)$  を定義する点達  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の中に含まれていると仮定してもかまわないので、 $f(X)$  は  $X_0$  において右解析的となる。

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $f(X)$  に対して、 $D$  内の各点  $X_i (i=1, 2, \dots, n)$  から (2.11) によって定義できる関数を  $f_{X_i}(X), (i=1, 2, \dots, n)$  とするとき、それらから構成できる関数は、命題3.2よりエアロ関数である。 (q. e. d)

定理2.5の一致の定理は次のように一般化できる。

**定理3.2**  $f(X)$  を領域  $D$  上のエアロ関数とする。 $D$  内のある1点  $X_0$  に収束する  $\det(X_n - X_0) \neq 0$  を満たす無限個の点列  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して、 $f(X_n) = O$  ( $X_0$  を含む) であるならば、 $f(X)$  は  $D$  上で恒等的に  $O$  である。

証明 定理3.1より、 $f(X)$  は点  $X_0$  において、適当な正数  $r$  に対して、 $D(X_0, r)$  の範囲で右テーラー展開できる。このとき、 $X_0$  に収束する  $\det(X_n - X_0) \neq 0$  を満たす無限個の点列  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $D(X_0, r)$  に含まれていると考えてよい。その右テーラー展開が以下のものであるとする。

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (X - X_0)^k$$

$f(X_0) = O$  であることから、 $A_0 = O$  である。帰納法の仮定で  $A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = O$  として、 $X \in D(X_0, r)$ ,  $\det(X - X_0) \neq 0$  の範囲で次のような関数を考える。

$$f_n(X) = \left( \sum_{k=n}^{\infty} A_k (X - X_0)^k \right) (X - X_0)^{-n}$$

そのとき、 $\sum_{k=n}^{\infty} A_k (X - X_0)^k = f(X)$  であることと  $f_n(X_0)$  の連続性より、

$$A_n = f_n(X_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(X_k) (X_k - X_0)^{-1} = O$$

したがって、 $X \in D(X_0, r)$  において  $f(X) = O$  となる。 $f(X), (X \in D(X_0, r))$ , を解析接続することによって、 $f(X)$  は  $D$  上で恒等的に  $O$  となる。 (q. e. d)

**定理3.3** (2.11) によって  $f_{X_0}(z)$  から定義された領域  $D$  上の  $f(X)$  は、 $f_{X_0}(z)$  の  $z$  に  $X - X_0$  を代入したものに等しい。

証明 定理2.4より、 $X$  が  $D(X_0, r)$  内にあるときは、 $f(X)$  は  $f_{X_0}(z)$  の  $z$  に  $X - X_0$  を

代入したものに等しい。また、 $D$  上の  $f(X)$  は  $D(X_0, r)$  上の  $f(X)$  の延長であるので、定理3.2より、 $f(X)$  は  $f_{X_0}(z)$  の  $z$  に  $X - X_0$  を代入したものである。 (q. e. d)

次に、 $f(X)$  の右テーラー展開における係数の大きさを評価する。

**定理3.4**  $M_2(\mathbb{C})$  内のある領域  $D$  の各点で右解析的な関数  $f(X)$  が  $D$  内の各点  $X_0$  で、 $\|X - X_0\| < r$  なる範囲において、

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (X - X_0)^k$$

と展開されるとき、 $f_{X_0}(z) = f\left(X_0 + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)$  の  $|z| = r$  における  $\|f(X)\|$  の最大値を  $M(r)$  とする。そのとき、

$$\|A_k\| \leq \frac{M(r)}{r^k}$$

が成り立つ。

証明

$$(3.2) \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f_{X_0}(z)}{z^{k+1}} dz$$

と表示できるので、

$$\begin{aligned} \|A_k\| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{k+1}} \times 2\pi r \\ &= \frac{M(r)}{r^k} \end{aligned}$$

となる。 (q. e. d)

**定理3.4の系**  $M_2(\mathbb{C})$  全体で定義されるエアロ関数  $f(X)$  が有界ならば、 $f(X)$  は定数である。

証明 定理3.4より、 $f(X)$  の右テーラー展開の係数  $A_k$  は、

$$(3.3) \quad \|A_k\| \leq \frac{M(r)}{r^k}$$

を満足する。今、仮定より、任意の  $r$  に対して、 $M(r) \leq M$  となる定数  $M$  が存在するので、すべての自然数  $k$  に対して、

$$(3.4) \quad \|A_k\| \leq \frac{M}{r^k}$$

となる。さらに、(3.4)における  $r$  は  $f_{X_0}(z)$  が正則である限り大きく取れるので、 $r \rightarrow \infty$  とすれば、 $A_k = 0$  である事がわかる。したがって、 $f(X)$  は定数である。

(q. e. d)

最後に、定理2.4の下での注意の中で用いたエアロ関数の重要な事実を証明する。  
 $f(X)$  を領域  $D$  上のエアロ関数とする。 $f(X)$  に対して、

$$\tilde{d}f(X) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f\left(X + \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}\right) - f(X)}{w}$$

と定義して、この極限值が存在するとき、 $\tilde{d}$  微分可能であるということにする。そのとき次の定理が成り立つ。

**定理3.5** エアロ関数  $f(X)$  は  $\tilde{d}$  微分可能である。

証明 定理3.1によれば、エアロ関数  $f(X)$  は右解析的であり、さらに補題2.2を用い  
 れば、 $f(X)$  が  $\tilde{d}$  微分可能であることがわかる。 (q. e. d)

## おわりに

この論文で展開した理論の応用として、楕円関数の一般化やそれに対応する楕円曲線の一般化を構成することが可能である。また、一般化された関数の等分点を基礎体に添加した体を考えると、非アーベル拡大体が構成され、その相互法則を考察することができる。それらは、別の機会で発表する予定である。

## 参考文献

- [1] Ф. Р. Гантмахер: *The Theory of Matrices*, I, II, Chelsea (1959)
- [2] 杉浦光夫: *Jordan 標準系と単因子論*, I, II, 岩波講座 基礎数学 (1977)
- [3] 千葉克裕: *行列の関数とジョルダン標準形* サイエンティスト社 (1998)

【著者略歴】

吉本 明宣（よしもと あきのり）

1959年 愛知県生まれ

所 属・現 職 梶山女学園大学 現代マネジメント学部・講師

最終学歴・学位 名古屋大学大学院理学研究科博士課程後期課程数学専攻満期退学・理学修士

所 属 学 会 日本数学会

主 要 著 書 「四元数体上の非可換ガロア拡大のガロア群の構造」『社会と情報』10(2) (2006), 梶山女学園大学生生活科学部生活社会科学科, pp. 93-103.

「2 冪剰余環の既約剰余類群の構造とその応用」(共著者：石井雅治)『現代マネジメント学部ディスカッションペーパー』12 (2007), 梶山女学園大学現代マネジメント学部, pp. 1-9.

「2 冪剰余環の既約剰余類群の構造の暗号への応用」(共著者：石井雅治),『日本応用数学会論文誌』19(1) (2009), 日本応用数学会, pp. 57-71.