地球の大きさと最小2乗法

森棟公夫 *Kimio Morimune*

要旨

最小2乗法の誕生に関する歴史的な経緯を調べた。最小2乗法は，今日では統計学における標準的な手法であるが，その発案には測地学の発展という歴史的な背景があることが分かった．最小2乗法は，メートル法の制定に密接に関わった形で発案されたが，メートル法の制定は，地球の大きさを測るという壮大なプロジェクトと深く関わっている．なぜなら，メートル法では，北極から赤道までの子午線（経線）の長さが1万キロメートルと先に定められているからである．地球の大きさが問題になるのであるから，地球の形に関する理解，あるいは測地学の発展を概観する必要が生じた．

1メートルの長さの決定においては，フランス革命の中，パリを通る子午線がほぼ10度の区間に亘って測定された．測量結果の分析のためにルジャンドル（およびガウス）によって最小2乗法が考案され，最小2乗法の利用は一気に科学界に広められたという．しかし，最小2乗法は，メートルの長さの決定には直接は使われていない．最終的な値はラプラスの計算によるものであり，本稿ではラプラスの計算法を説明した．ラプラスは二元連立方程式を2個の未知数について解いて地球の大きさを計算しており，統計的推定は利用しない．

キーワード：□最小2乗法　□メートル法　□子午線の測量　□統計的推定　□過剰決定　□正規方程式　□楕円弧の長さ

1 序文

最小2乗法とは，二変数間の関係を表す散布図に，回帰直線を引く方法である．目的が直線を引くことだけであれば，これは特に詳細な説明も必要ない分析法に過ぎず，今日では，エクセルのグラフ機能により散布図を描き，簡単な指定により回帰直線を引くことができる．多変数の回帰分析も，エクセルの分析ツールの機能により必要な計算をすることができる．利用頻度が高い分析法であるからこそ，最小2乗法はこのように汎用ソフトに組み込まれているのだが，資料の分析においてこのように頻繁に利用される最小2乗法を見つけたのは誰なのか，また，いかなる状況において最

小2乗法が開発され，多くの分析者に用いられるようになったのか．このような疑問の答えを見つけることが，本稿を準備する目的であった．

最小2乗法の発見についてはかなりの数の論文が書かれており，特に，ガウス（Gauss, Carl Friedrich）とルジャンドル（Legendre, Adrien Marie）のpriorityに関する有名な争いがある．このpriority争いは，厳密には未だ解決を見ていない．論争ではなく，争いと表現しているところに注意されたい．詳細は後で述べる．次に，priority争いにかかわらず，最小2乗法の最初の応用例に興味を持った．これも容易に答えは見つかったが，驚くことに最初の例は，1mの長さの決定の為の計算であった．よく知られているように，1mの長さは単に尺度として意味を持つのではなく，地球の大きさと結び付いて定義されている．当然ながら，1mは最小2乗法によって定まったのかという期待が生じた．最小2乗法が1mの決定に使われたとしたら，それは最小2乗法の出発を飾る華々しい出来事ではないか．残念ながらこれは違っており，1mの長さは最終的にラプラス（Laplace, Pierre Simon）による計算を元にしていることが分かった．とすると，このラプラスの計算法はいかなるものであったのか．本稿では，1mの決定に使われたラプラスの計算を明らかにし，そしてラプラスが用いた孤長に関する式をベッセルの楕円弧積分から導いた．したがって，3.1節と4.3節が本稿の中心となる．

以下では，最初に，メートル法に及ぶ地球の形状に関する測地学の発展を紹介する．次に最小2乗法に至る計算法を説明し，最小2乗法の考え方を紹介する．最後にラプラスの計算の解釈を与える．補論で，ルジャンドルの計算を示し，ガウスの数値が他の結果とは大きく隔たっていることを確認する．

2　地球の形と大きさ

メートル法は地球の大きさと結びついた尺度で，フランス革命の初期に子午線の長さを4万kmと定めたことから計測が始まった．子午線が4万kmだから，北極から赤道に至る子午線の距離は1万kmになる．だから，北極から始まり北極に終わる地球の楕円周の4分の1を，古い尺度，トワーズ（toises）で測れば，1mの長さを定めることができる．古い尺度であるトワーズで，地球の大きさを定めるといってもよい．

2.1　地球は球か

計測の詳細に入る前に，地球の形に関する探求の歴史を振り返ってみる．地球の大きさに関する最初の既述はギリシャ時代に遡る（測地学については，横山［20］，大塚［4］を参考にしている）．ギリシャのエラトステネス（*BC* 276–196頃）は，エラトステネスのふるいと呼ばれる中学で学ぶ素数の見つけ方を考案した数学者であるが，エジプトのシエネとアレクサンドリアにおける影の長さに違いがあることに気がつく．シエネは現在のアスワンで，北回帰線に近く，夏至の日の南中時に井戸の底に太

陽の光が達することが知られていたらしい．ところがアレクサンドリアでは同じ時刻に太陽に影があり，エラトステネスはこの影の角度を用いて地球の円周を決定できる事に気がついた．アレクサンドリアにおける太陽の入射角度は7.2度であったから，これを緯度の差として，シエネとアレクサンドリアの距離5000ステディオンを50倍（360/7.2）し，25万ステディオンという円周が求まった．現代の距離にすると，46250kmほどになるという．この計算は大まかである．まず，2都市間の距離は直線でもない道を歩測によって求められているから，厳密ではありえない．ステディオンという単位は一歩の幅を基礎とするらしく，また競技場などを意味するstadiumという言葉に繋がるということである．また，地球が円球であれば全ての子午線の円周は等しくなるが，シエネとアレクサンドリアが同じ子午線，東経30度，の上にあるわけではないから，25万ステディオンは円周から多少ともずれる．しかし，地球の形が円球であることを前提としてこのような計算が行われたことが重要で，数値は文献により様々だが，測地学においてよく知られた知識の一つである．

エラトステネスから1500年後には，地球が扁平か円球かが問われる．マルコポーロが陸路を東に行き，中国やインドを訪れたとされているが，1299年頃に出版された東方見聞録は，アジアとの交易に関心を呼び起こすきっかけの一つとなった．ヨーロッパから海路を使う交易は，まずアフリカ西岸への冒険から始まる（以下，林屋・他［11］を参考にしている）．1488年にポルトガル人のバルトロメウ・ディアスがリスボンから出航して，喜望峰を発見した．この時，ディアスは航海を続ければインドに到達できることを信じていたと言われる．その後，1498年にポルトガル王の命を受けたバスコ・ダ・ガマがディアスを伴って喜望峰を回って航海し，インドに到達している．それ以後，インドやフィリピンとの東回り海路による交易が行われた．インド洋では既にアラブ人により交易が行われていたようだから，ガマの冒険の成果は喜望峰を回ってアフリカ西岸とインド洋を繋ぎ，ポルトガルによるアジアとの直接交易を確立したことにある．ディアスは喜望峰を嵐の岬と名付けたそうだが，ポルトガル王ジョアン2世は交易を通した将来の国益の拡大を夢み，喜望峰と名を変えた．

コロンブスは，スペインから西に航海すればアジアに着くと主張した．当時は，大西洋を超える交易は存在せず，大西洋に関する情報も少なかった．そのため航海は恐れられ，乗組員90名の内4名は殺人に関与した者であったという（青木［2］）．コロンブスは1492年にスペインを出航して，彼がインドの一部と信じた西インド諸島に到達した．

コロンブスは大西洋を西に航海して西インド諸島に到達したが，西インド諸島はアジアではないから，地球が円球であることが証明されたわけではない．それを確認したのは，1519年にスペインを出航したポルトガル人のマゼランである．大西洋から南アメリカの南端に達し，マゼラン海峡を発見して太平洋に出たマゼランは，太平洋の名付け親でもあった．マゼランはさらに西に航海を続けフィリピンのセブ島に上陸するが，そこは彼がかって東回りの航海で聞き知っていたマレー語圏であることが分

かり，西回りの世界一周が一応完結する．彼はフィリピンで殺されたが，艦隊はスペインに戻り，地球は球であることが確認された（林屋・他［11］）．

地球の形状とは直接関係はないが，ニュートンに繋がるその後の天文学における重要な発展を取り上げておくと，まず，コペルニクスが当人の死亡年，1543年に「天体の回転について」を出版している．ガリレオは，「天文対話」を1632年に出版したが，ローマ教皇庁はそこに含まれる地動説により1633年ガリレオに有罪の判決を下した．

2.2　地球は円球ではない

100年以上の年月がたって，天文学者の間に地球の形が円球であるか否かの疑問が生じてきた（以下，横山［20］，大塚［4］を参考にしている）．そして，ルイ14世は1666年に科学アカデミーを設立し，また，子午線1度の距離を決定することになった．フランスは南アメリカのフランス領ギアナに調査隊を派遣する（1671−74）．天文学者リシェ（Richer, Jean）は，フランス領ギアナのカイエンヌ（北緯5度）で，彼の天文観察用の振り子時計が，パリ（北緯49度）と比べて2分28秒遅れることに気がついた（Olmsted［16］）．海抜では違いが無いにもかかわらず，なぜカイエンヌで時計が遅れるのか．答えはニュートンによって与えられた．地球は円球ではなく扁平な楕円球（扁平楕円体，oblate spheroid）であり，子午線に沿って地球を縦に切ればその面は南北を短軸，東西を長軸とする楕円になるというものであった．地球は，南北の極から多少押しつぶされ，カボチャのような形になっているという．したがって，赤道に近いカイエンヌは地球の球心から測ればパリよりも遠くに位置しており，この距離の差により重力が弱まり，振り子が遅れるのである．ニュートンは，プリンキピア（1687）の中の計算で，楕円の扁平率が1/230であることを示した．扁平率とは，長径と短径の差を長径で割った値で，円ではゼロになる．

他方，リシェと研究を共に行っていた初代パリ天文台長のカッシーニ（Cassini, Giovanni D. 1625−1712）は，地球は南北に長い楕円であると主張した．この説は，2代目のパリ天文台長となる息子（Cassini, Jacques）と行った測量によって確認されている．しかし，この測量は後に不正確であったことが判明する．

当時の科学界は，この地球の形状に関する二説に大きな関心を抱き，この疑問を解決するために大規模な測量を行うこととなった．測量の基礎は，ニュートン説が正しければ，経線に沿って北に行くほど，緯度1度分の距離が長くなるという関係である．図1では，北緯45度を基準として，北の弧と南の弧の長さを比較する．

正確な緯度の測定に必要な望遠鏡はすでに天文学者によって利用されていた．経線に沿った弧の長さは，三角測量法によって測る．三角測量法によれば，基準となる直線の距離と，基線の両端から三角点への角を測定することにより，全ての辺の長さ等を計算することができる．また，三角形を積み重ねていくことにより，任意の地点間の距離を厳密に測定することができる（横山［20］．三角測量法において，球面三角

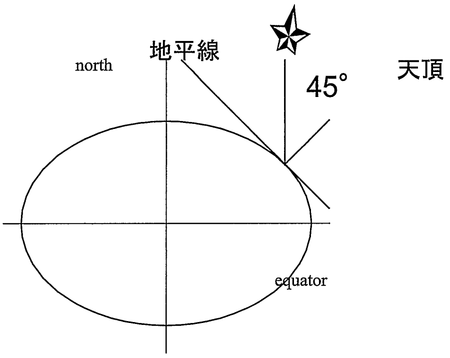

図1　楕円弧の長さ（北緯45度の北と南）

表1　3地点における子午線の孤長

地名	中点緯度	平均距離/1°	
ラップランド	北緯66°20′09.91″	60954.8 fathoms	57193.418 toises
フランス	北緯44°51′02.65″	60755.7 fathoms	57006.604 toises
ペルー	北緯1°31′00.34″	60467.7 fathoms	56736.376 toises

ラプラス［14］のp. 452、Table A、またはエアリ［1］、pp. 568−570。この測定値は18世紀中期の値とは異なる。フランスは表2より新しいAragoによる1809年の計測値（4節参照）で、区間はFormentera-Dunkirk. Fathomはイギリス、toise（トアズ）はフランスの測定単位で、1.065766fathomが1toise。横山［20］と大塚［4］では、ラップランドが北緯66°20′、57438トアズ、フランスが北緯45°00′、57012トアズ、ペルーが北緯1°31′、56753トアズとなっている。ただし、出典が記されていない。

法が使われたどうかは確認していない．しかし，球面三角法では後述のフランス測量を行ったドランブルの名が付いた公式が知られているので，フランス革命時のフランス測量では使われた可能性がある．）論争を解決するため，1735年から1743年にかけてフランス科学アカデミーはルイ15世の援助を得て，10名の探検隊を当時の西インド帝国（ペルー，現在のEcuador）のキトに送ったが，困難な遠征であり4名が死亡した．この測定については，トリストラム［19］を参照されたい．北のラップランドにも探検隊が送られた．測定結果はニュートンの説を支持するものであって，地球は南北が短い楕円体であり，カボチャの形をしていることが確認された．一度あたりの平均距離の測定結果と中点緯度は，表1のようになっている．

3　扁平楕円体

このような18世紀前半に行われた計測によって，地球がカボチャ型であるということだけが分かった．18世紀後半になると，地球が回転楕円体であることは天文学での定説となる．地球は，北極あるいは南極から見れば円，横から見れば楕円になっている．しかし，扁平楕円体（oblate spheroid）の式

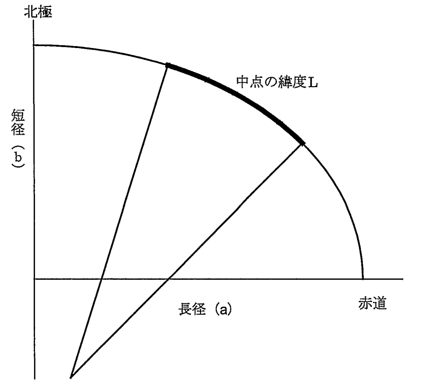

図2　（ψ', ψ）区間の弧と、中点緯度L

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

の特定はできなかった．現代では，未知数は長径aと短径bの2個であるから，表1のように観測点が3点あれば，何らかの数学的な方法で未知数の値を決めることができる．子午線上では上式においてxを常に0としておけばよいから，表の値を用いて，楕円である子午線の長径と短径を求めればよい．

3.1　楕円弧長の線型展開

楕円弧に関してはベッセルによる積分（Bessel［5］）が知られている．時代的な関係が分からないが，この楕円積分のドランブル［6］による展開式が導かれているので，この式からラプラスが頻繁に用い，ルジャンドルの最小2乗法でも使われた線形式を導く．

両端の緯度がラジアンでϕ'とϕである楕円の孤長s'は，ベッセル積分により

$$s'=a\ (1-e^2)\ \int_{\phi}^{\phi'}(1-e^2\sin^2\theta)^{-3/2}d\theta \tag{2}$$

となる．aを長径，bを短径として，

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

は離心率，扁平率は

$$\varepsilon=1-\frac{b}{a},$$

離心率と扁平率には，$\varepsilon=1-\sqrt{1-e^2}$，あるいは$e^2=2\varepsilon-\varepsilon^2$という関係がある．1792年からフランスの測量を行ったドランブルが，この積分の展開式を導出している．それは，

$$s' = a(1-e^2)\left\{\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\cdots\right)(\phi'-\phi)\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\cdots\right)(\sin 2\phi'-\sin 2\phi)$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{15}{64}e^4+\cdots\right)(\sin 4\phi'-\sin 4\phi)+\cdots+O(e^5)\right\}$$

となる．この展開式は理科年表［12］（p. 561）に掲載されている．後の分析では，εに関しての展開においてε^2項までしか使わないので，先に示したεとeの関係により，上式以上に詳細な展開式は必要でない．以下，関係式$e^2=2\varepsilon-\varepsilon^2$を用い式の整理をすると，ベッセル積分は

$$s' = a\left\{\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{16}\varepsilon^2\right)(\phi'-\phi)-\frac{3}{4}\varepsilon(\sin 2\phi'-\sin 2\phi)\right. \tag{3}$$
$$\left.+\frac{15}{64}\varepsilon^2(\sin 4\phi'-\sin 4\phi)\right\}+O(\varepsilon^3)$$

と展開できる．ここで，$\phi'=\pi/2$，$\phi=0$と置けば，子午線の四分孤長Sが，

$$S=\frac{\pi}{2}a\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{16}\varepsilon^2\right) \tag{4}$$

と求まる．$\frac{\pi}{2}$で割れば1ラジアン当たりの平均孤長が

$$s=a\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{16}\varepsilon^2\right)$$

となる．このsを使って展開式（3）を整理すると，

$$s'=s\left\{(\phi'-\phi)-\left(\frac{3}{4}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2\right)(\sin 2\phi'-\sin 2\phi)\right.$$
$$\left.+\frac{15}{64}\varepsilon^2(\sin 4\phi'-\sin 4\phi)+O(\varepsilon^3)\right\} \tag{5}$$

となり，ラプラス［14］（[2034d]式）に一致する．ただし，扁平率の定義がしばしば$(a-b)/b$となっていることに注意する必要がある．これはエアリ［1］（p. 550）でも同じ．また，本稿では1ラジアン当たりの孤長をsとする．これは，円では，半径をrとすれば円周は$2\pi r$，四分孤は（$\pi/2)r$，したがって1ラジアン当たりの平均孤長sはrと一致し，明快な意味を持つからである．以下，この式の表現を変えてみる．三角関数の性質により，

$$s'=s\left\{(\phi'-\phi)-\left(\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\sin(\phi'-\phi)\cos(2L)\right.$$
$$\left.+\frac{15}{32}\varepsilon^2\sin(2\phi'-2\phi)\cos(4L)\right\}+O(\varepsilon^3),\ L=\frac{\phi'+\phi}{2} \tag{6}$$

となる．小さな$\phi'-\phi$については，$\sin(\phi'-\phi)\simeq(\phi'-\phi)$とテイラー近似でき，また$\sin(2\phi'-2\phi)=2\sin(\phi'-\phi)\cos(\phi'-\phi)$だから，

$$s'=s(\phi'-\phi)\left\{1-\left(\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\cos(2L)\right.$$

$$+\frac{15}{16}\varepsilon^2\cos(\phi'-\phi)\cos(4L)\Big\}+O(\varepsilon^3) \tag{7}$$

となる．この式の低次展開は，

$$s'=s(\phi'-\phi)\left\{1-\frac{3}{2}\varepsilon\cos(2L)\right\}+O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

両辺をラジアン角度差で割り整理すると，(6) 式は

$$\frac{s'}{\phi'-\phi}=s-s\varepsilon\frac{3}{2}\cos(2L) \tag{9}$$

$$\simeq s\left(1-\frac{3}{2}\varepsilon\right)+3s\varepsilon\sin^2 L \tag{10}$$

となる．

(9) 式をn個の観測値に対する回帰式

$$y_i=e+f\cos(2L_i),\ i=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

と考えてみよう．Lに45度（$\pi/4$）を代入すると，切片eは1ラジアン当たりの平均距離sになっており，また扁平率は

$$\varepsilon=-\frac{2f}{3e} \tag{12}$$

と計算することができる．切片の意味がはっきりしているので使いやすい．（この関係は，εに関する一時の近似においてのみ正しい．）(10) 式を回帰式の体裁で表記すると

$$y_i=g+h\sin^2 L_i,\ i=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

となる．この式が推定できれば，扁平率は

$$\varepsilon=\frac{2h}{6g+3h}$$

によって求まる．また，1ラジアン当たりの平均距離は，

$$s=\frac{h}{3\varepsilon}$$

により求まる．実際，18世紀末では，この (11) 式や (13) 式が孤長の測定における基本的な関係式として扱われていた．（スティグラー［17］，3.1式，p. 469．ラプラス［14］[2032*b*]式）

3.2　過剰決定問題

表1の観測値を (11) 式に代入してみると

$$57193.418/l=e+f\cos(2\times 66°20'09.91'')$$
$$57006.604/l=e+f\cos(2\times 44°51'02.65'')$$

$$56736.376/l = e + f\cos(2 \times 1°31'00.34'')$$

となる．$l = \frac{\pi}{180}$は，左辺をラジアン当たりの孤長とするための調整項である．両辺にlを掛けると，係数eとfの定義が変わる．変換された式

$$57193.418 = c + d\cos(2 \times 66°20'09.91'')$$
$$57006.604 = c + d\cos(2 \times 44°51'02.65'')$$
$$56736.376 = c + d\cos(2 \times 1°31'00.34'')$$

の係数値の意味は変化し，特に定数項は1度当たりの孤長となる．ただし，両係数とも同じlを掛けて定義されるので，扁平率の求め方は変わらない．いずれにしろ，式が3本，未知数は2個なり，式の数が未知数よりも多い過剰決定の状況が生じている．当時はこの過剰決定問題の解決法が知られていなかった（スティグラー［18］）．

同様の問題は他の研究でも生じている．1750年，メイヤー（Mayer）は月のクレーターManiliusに関する27組の観測値を得たが，線形式の未知数は3個であるので，同様の過剰決定問題に直面した．メイヤーの解決法は27式を3群に分け，各群で式の平均を求め，得られた3本の平均式より3個の未知数を解くというものであった．スティグラー［18］（p. 47）によれば，ボスコビッチは1765年に最小絶対偏差による解法を導いた．ただし，切片は式の総和がゼロになるように調整され，傾き係数だけが，最小絶対偏差法によって計算される．解法は幾何学による．

4 メートル法

話はメートル法制定に跳ぶ．ここで，1750年以後扱われてきた過剰決定問題が再び生じる．メートル法といっても本稿では長さの測定単位mだけを問題にする．フランスでは，1789年にバスティーユ牢獄が陥落した．フランス革命の中，1790年にメトリックシステムを促進する法律が国会で可決される．長さに関しては，北極から赤道に至る子午線の長さが1万kmと定められる．このように，北極―赤道間を1万kmと先に定めてしまうと，この区間を旧単位で測量する必要が生じる．そこで，フランス科学アカデミーは，ダンケルクからペルピニョンを超え，スペインのバルセロナに至る子午線を測量することとし，天文学者ドランブル（Delambre, Jean-Baptiste Joseph）とメシャン（Méchain, Pierre François André）にその任を与える．革命が進行する中，この測量は1792年に始まり，1799年に終了する．困難に満ちた測定については，オールダー［3］を参照されたい．メシャンは測定の功績が認められ，1799年に，革命の中で天文台長を辞めたカッシーニ4世の二代後，ラランド（Lalande, Joséph-Jérôme Lefrançais de）を嗣いでパリ天文台長になった．カッシーニ家の世襲は1671年から1793年まで122年に及んでいる．ドランブルはフランス科学アカデミーおいて終身書記という地位を得，またメシャンの死後，パリ天文台長になってい

表2　ドランブルとメシャンおよびペルーの計測

区間	孤長	区間緯度°	平均距離/1°	中点緯度	端点緯度
	s'	$(\phi'-\phi)°$	$s'/(\phi'-\phi)$	$L°$	51.0362496
DP	62472.59	2.189097	28538.06097	49.9417011	48.8471526
PE	76145.74	2.66868	28533.10406	47.5128126	46.1784726
EC	84424.55	2.9633616	28489.45735	44.6967918	43.215111
CM	52749.48	1.852659	28472.19144	42.28878195	41.3624529
計	275792.36	9.6737967	28509.18994	46.19935125	
Peru	88448.70	3.11697	28376.50026	0	

注：ラプラス［14］（p. 443およびp. 453）の数値は100度システム．
測定単位はダブルトアーズ（モジュール）で，トアーズの二倍．

る．そして，1799年に度量衡に関する国際会議で測量結果が承認され，メートルの長さが定められた．長さの基礎となる子午線の四分孤長として使われたのは，ラプラスの計算であった．（オールダー［3］，パリ天文台HP）

メシャンとドランブルによる測定はほぼ7年の歳月をかけて終了した．フランスの北端のダンカーク（*Dunkirk*）から，パリにあるパンテオン（*Pantheon*）宮殿を通り，南に下ってエボ（*Evaux*）とカルカソン（*Carcassonne*）を通り，地中海に至る子午線の計測が行われたが，南端はスペイン領のバルセロナにあるモンジョイ（*Montjoui*）が選ばれた．カッシーニ2世の計測はペルピニョンまでだから，さらに南下していることが分かる．後日，アラゴ（François Arago）はこの子午線を更に南のフォーメンテラ（Formentera）まで計測した（1809年，表1）．フランスはこの子午線を本初子午線に制定することを主張するが，1884年の国際会議においてイギリスのグリニッチを通る子午線に敗北している．また，フランス革命の最中では自国内の測量でも王党派か革命派かと疑われるが，メシャン，アラゴは隣国を測量したのであるから，スパイ嫌疑などが生じたのも当然である．測定結果は表に示したが，ほぼ10度に亘る区間が，4区間に分割されて計測されている．北に行くほど1度当たりの距離が長くなっていることが，この測定結果からも確認できる．

4.1　最小2乗法

フランス・データの分析において，最小2乗法が生まれる．最小2乗法は，ルジャンドル［13］（補論）が計算公式を明示しているが，そこでの数値例もフランス・データを用いたメートルの長さを決める計算である．主たる計算結果は，子午線の四分孤長と扁平率であるが，ガウス［7］も四分孤長と扁平率の値を示している．フランスでの子午線の測量データが，即時にドイツにも伝わっていたことが分かる．ガウスの計算は，「1795年（17歳の時，筆者）から使っていた方法（つまり最小2乗法，筆者）による」と1809年に述べるが，計算の詳細を公表することはなかった（スティグラー［17］，p. 465）．そして，ガウスは一貫してルジャンドルの補論の存在を

無視し，それに対するルジャンドルからの直接の抗議をも無視する．当然ながら，最小2乗法の発案についてのpriority争いが生まれる．このpriority争いは未だ解決したとは言えないが，スティグラー［17］は，最小2乗法を世間に広めたのは，計算式を公表したルジャンドルの功績であると述べる．後で一部紹介するが，スティグラーはガウスの数値結果を追認する努力を重ねたが，追認はできなかった．筆者が行った幾つかの試みも本稿の補論で簡単に紹介するが，高々似た値を生じることができただけであった．1*m*の最終的な値はラプラスの計算によるが（4.3節），ラプラスは子午線の四分孤長計算法の一つとして，最小2乗法も使っている．

ガウスは1801年に，イタリアの天文学者ピアッツィ（Piazzi）が1月間観測した後行方不明になっていた小惑星ケレスの軌道を計算して，ヨーロッパの科学界に名を轟かせた．その時ガウスは24歳であった．（2006年に，ケレスは小惑星から準惑星に格上げされた．）他，様々な数学的な貢献を生涯にわたってもたらした．ガウス［8］では最尤法を提案し，最小2乗法の最適性などの重要な性質を導いている．

4.2 正規方程式

ルジャンドル［13］（補論）が提案した最小2乗法は，観測個数に等しい数の式を，未知数の数に等しい正規方程式にまとめる方法である．y_iを式の左辺になる変数，x_i，z_i，w_i，…を式の右辺に入る変数，e_iを誤差とすると，回帰式は現代風に，

$$y_i = a + bx_i + cz_i + dw_i + \cdots + e_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

と表現できる．$(y_i, x_i, z_i, w_i, \cdots), i = 1, 2, \cdots, n$は$n$組の観測値のセットであり，右辺の右端にある$e_i$は，左辺$y_i$と右辺の線形式

$$a + bx_i + cz_i + dw_i + \cdots$$

の差異を示す．$a, b, c, d, \cdots$は，未知の係数である．最小2乗法は，n組の観測値のセットを用いて未知係数の値を推定する方法であり，原則は，誤差の2乗和を最小にすることにある．つまり，

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i - cz_i - dw_i - \cdots)^2$$

を最小にするように$a, b, c, d, \cdots$を求める．左辺y_iの変動を，線形式$a + bx_i + cz_i + dw_i + \cdots$によってできる限り精密に説明するという意味を持つ．

回帰式は全部でn個定められるが，未知数は，「…」を無視すると，a, b, c, dの4個となる．上述の2乗和をa, b, c, dに関して最小化すると，最小化の条件は

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i - cz_i - dw_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i - cz_i - dw_i)x_i = 0$$

などの4式となる．正規方程式とよぶ．結局，50年の歳月を掛けて，過剰なn個の式

を未知係数a, b, c, dの数に等しい4式にまとめる方法として，最小2乗法が導かれた．

スティグラーは，(11) 式を回帰式として扱い，表2の値を (11) 式に代入する．結果は，

$$
\begin{aligned}
&DP \quad 28538.0 = c + d\cos(2\times 49.94^\circ) = c + d \times 0.095\\
&PE \quad 28533.1 = c + d\cos(2\times 47.51^\circ) = c + d\times 0.011\\
&EC \quad 28489.5 = c + d\cos(2\times 44.70^\circ) = c + d\times -0.088\\
&CM \quad 28472.3 = c + d\cos(2\times 42.29^\circ) = c + d\times -0.172
\end{aligned}
$$

となる．この回帰では式は4本 (4区間) で，未知数はcとdの2個しか無く，また，$x_i = \cos(2L_i)$ となっている．左辺は1度あたりの平均距離であるから，北ほど，弧の長さが長くなる．未知数が2個で式は4だから，過剰決定が生じている．4式を2式にまとめることができれば，未知数と式の数が一致し，cとdが定まる．正規方程式は，

$$
\begin{aligned}
&114032.9 = 4c - 0.154d\\
&-4379.34 = -0.154c + 0.046474d
\end{aligned}
$$

となり，cとdを解くことができる．解は，cは28518.6，dは269.56である．cは1度あたりの平均孤長であるから，4分の1子午線$S=2566674$ダブルトアーズ，また扁平率は，

$$
\frac{2d}{3c} = 0.0063 = \frac{1}{158.7}
$$

となる．

(11) 式が唯一の回帰式の表現法ではない．孤長の式は元々が数学的な関数であるので，何を左辺に持ってくるかは分析者の自由な判断による．補論では，区間の緯度差を左辺に使った計算を示している．補論2で，ルジェンドルの数値例を詳細に説明するが，かなり特殊である．

4.3 ラプラスが計算したメートル長

メートル法を定める際に基礎となったラプラス [14] の計算を説明しよう．ラプラスはこの本の中で3種類の計算をしており，メートルの決定にどの計算を使ったかを理解するのは容易でない．スティグラー [18] は，p. 60で「Laplace's determination … using his own algorithm to minimize the maximum error.」と既述するが，これは誤りである．森棟 [15] ではラプラス [14] に沿って計算の粗筋を要約したが，以下ではベッセルの楕円弧積分からラプラスが利用した楕円弧長に関する展開式を直接導出し，そこからラプラスの計算結果を導く．

ラプラスはフランス科学アカデミーの重鎮であっただけでなく，ナポレオンが砲兵

学校で学んだ際にラプラスの数学試験を受けたという関係もあった．ナポレオンは，1798年に，ラプラスのお陰で科学アカデミーの最年少会員に選出されている．1799年の革命（18 brumaire）でナポレオンは権力を掌握したが，その時，ラプラスを法と度量法に関する内務大臣に40日だけ任命している（オールダー［3］）．

ラプラスの計算は，孤長に関する積分を展開した（6）式から導くことができる．表2に与えられているペルーとフランス全体の数値を代入すると，ペルーは$\phi'+\phi=0$だから

$$88448.70 = s\left\{3.11697^\circ l - 2\left(\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)\sin(3.11697^\circ) + \frac{15}{32}\varepsilon^2\sin(6.23394^\circ)\right\}, \tag{14}$$

フランス全体は，

$$275792.36 = s\left\{9.67380^\circ l - 2\left(\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)\sin(9.67380^\circ)\cos(92.39870^\circ) + \frac{15}{32}\varepsilon^2\sin(19.34759^\circ)\cos(184.79740^\circ)\right\} \tag{15}$$

となる．二式の比をとり，εを求めると，解は1.46011211と$2.987422\times10^{-3}=1/334.73677$になる．後者をペルーあるいはフランス式に代入すると，1ラジアン当たりの平均孤長sは1633165.815，子午線の四分孤が$S=2565370.862$となる．長径aも，（4）式から1635608.028と求めることができる．単位は全てダブルトアーズである．1mは0.256537ダブルトアーズとなる．

ラプラスの計算では，フランスとペルー・データを（6）式に代入して得た二式から二個の解が導かれており，統計的な推定が全く含まれていない．

5 結論

本稿では，最小2乗法が誕生するに至った歴史を調べた．最小2乗法は，今日では統計学における標準的な手法であるが，その発案には歴史的な意味が含まれていることが分かった．最小2乗法は，メートル法の制定に密接に関わった形で発案された．そしてメートル法の制定は，地球の大きさを測るという壮大なプロジェクトに深く関わっている．

地球の大きさの測定は地球の形に依存しているから，話はギリシャ時代における地球の形に関する理解に遡る．15世紀から始まる大航海時代では，地球が丸いか否かの確認が問題となっている．更に，17世紀に入ってからは，地球が円球でないことが発見される．17世紀末では，ニュートンがプリンキピア（1687）で地球は扁平な楕円球であると主張するが，逆に南北に縦長であると論じる天文学者もあった．18世紀前半には，地球の形に関する疑問を解くために，当時の西インド帝国（ペルー，今日のエクアドル）のキトおよびスエーデン北のラップランドに測量隊が派遣され

た．フランス本土でも測量が行われ，地球が扁平楕円体であることが確認された．私にとっては，当時のフランス科学アカデミーがこのような探検隊の派遣を発議することでさえ，驚きであった．もちろん，国王ルイ15世には単なる科学調査のための遠征ではなく，西インド帝国における資源調査を行い国益に利するといった別の目的を説明し，遠征資金を獲得したようだ（トリストラム［19］）．

ペルー，フランス，ラップランド三カ所の測量結果を得，地球が扁平楕円体であることが分かったが，当時は地球の大きさを定めることができなかった．観測値の個数が未知数の個数を超えるために解が一意に定まらず，過剰決定の状況が生じるためである．過剰決定問題を解決するために，観測値を未知数の数だけのグループに分けて，解を一意に求めるという方法が提案されている．また，未知数が2個の場合ではあるが，今日絶対最小偏差法として知られている方法も提案されている．

扁平楕円体の大きさを決めることは，メートル法の決定と結び付いてくる．なぜなら，メートル法では，北極から赤道までの子午線の長さを1万キロメートルと先に定めたからである．つまり，1mはこの子午線長の1000万分の1と定められた．このために，旧測定単位を用いて，同じ子午線の孤長を測る必要が生じたのである．メートル法は，地域および国を超えた共通尺度の設定を目的としたが，利便性を超え，1789年バスティーユ監獄の解放から始まったフランス革命における科学的なロマンの一つでもあった．メートル法制定のために大規模な大地の実測が必要とされ，カッシーニにより行われたパリを通る子午線の再測定が，フランス革命の中で実施される．測定結果の分析のために最小2乗法はルジャンドル（およびガウス）によって考案され，その利用は一気に科学界に広まった．

最小2乗法は測量結果の分析に使われたが，1*m*の決定に直接使われることはなかった．直接使われたのはラプラスの計算だが，ラプラスは，二元連立方程式を2個の未知数について解いて解を求めている．ラプラスは，それが厳密な解法であると考えたと想像する．最小2乗法は統計的推測であり，推定された式が全ての観測値を満たす事はない．誤差が生じ，誤差を小さくするという原則の下で推定値を求める．この統計的推測の考え方に，ラプラスは満足していなかったのではなかろうか．今日では，一部の情報を用いた厳密な解より，全ての情報を用いた推定結果の方が信頼度が高いことが知られている．

最小2乗法についてpriority争いが始まっていることにも，大いに興味が持たれる．このpriority争いは，ガウスとルジャンドルという二人の巨人の間に起きている．ガウスはルジャンドルを無視し，また彼は計算結果は示すものの，争いの中で自分の計算法を人に示したりはしなかった．まさに時代を反映した争いであるが，ルジャンドル無くしては最小2乗法が科学界に広まらなかったことが確認できる．

当時の日本では，1800年に伊能忠敬が蝦夷地の測量を始め，1808年に弟子の間宮林蔵が樺太を探検し，1821年，伊能の死後に大日本沿海輿地全図が完成した．伊能の測量には，ヨーロッパの測量機器が用いられたようである．緯度は正確だが，経度

の測定には誤差があり，多少東にずれている（渡辺［21］p. 47）．伊能は地球の大きさも推定したという．また，大日本沿海輿地全図の縮小版をシーボルトが国外に持ち出そうとしたことで，1829年にシーボルト事件が起きる．この事件は，シーボルトの荷物を積んだ船が難破し，その荷物を検査したところ地図が出てきたことが発端となっているが，地図は国外に持ち出されシーボルトの著書に掲載されている（秦［10］）．

参考文献

［1］Airy, George Biddell (1826), On the figure of the earth, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, pp. 548-578

［2］青木康征（1989），「コロンブス　大航海時代の起業家」，中公新書936

［3］Alder, Ken (2002), The Measure of all things: The seven-year odyssey and hidden error that transformed the world, New York: The Free Press, 邦訳は「万物の尺度を求めて」オールダー著，吉田訳（2006），早川書房

［4］大塚道男（1980），「地球を測る」，朝日選書155

［5］Bessel, F. W. (1837), Bestimmung der axen des elliptischen rotationssphäroids, welches den rorhandenen messungen von meridianbögen der erde am meisten entspricht, Astronomonische Nachrichten 333. Translated in 1841 as Determination of the axes of the elliptic spheroid of revolution which most nearly corresponds with the existing measurements of arcs of the meridian. In Scientific Memoirs. (Richard Taylor, ed.) 2, 387-401

［6］Delambre, J. B. J. (1799), Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien; précédés d'un mémoire sur le même sujet par A. M. Legendre, De L'Imprimerie de Crapelet, Paris, 72-73

［7］Gauss, Carl Friedrich (1799), Allgemeine geographische ephemeriden, Vol. 4, p. XXXV (translated in p. 466 of Stigler 1981)

［8］Gauss C. F. (1809), Theory of the motions of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections, Dover (1963) reprint

［9］Harter, H. Leon (1974), The method of least squares and some alternatives-Part 1, International Statistical Review, Vol. 42, No. 2, 147-174

［10］秦　新二（1996），「文政十一年のスパイ合戦」，文春文庫

［11］林屋，野々山，長南，増田（1965），「コロンブス，アメリゴ，ガマ，バルボア，マゼラン　航海の記録」大航海時代叢書1，岩波書店

［12］国立天文台編（2005），「理科年表」，机上版第78冊，丸善株式会社

［13］Legendre, Adrien Marie (1805), Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Appendice: Sur la méthode des moíndres quarrés, 72-80, Paris: Courcier

[14] Laplace, Pierre Simon (1829–1839), Celestial mechanics, translation of Méchanique céleste (1799–1805) by Nathaniel Bowditch, Vol. 2, Boston: Hilliard, Gray, Little, and Wilkins. Photographically reprinted, 1966, New York: Chelsea.

[15] Morimune, K (2009), Laplace's calculation of the length of meter, The Kyoto economic review, Vol. 78, No. 2, 103–114

[16] Olmsted, John W. (1942), The Scientific Expedition of John Richer to Cayenne (1672–73), Isis, 34, 117–28.

[17] Stigler, Stephen M. (1981), Gauss and the invention of least squares, The Annals of Statistics, Vol. 9, No. 3, 465–474

[18] Stigler, Stephen M. (1986), The history of statistics: the measurement of uncertainty before 1900, Harvard University Press

[19] トリストラム著，喜多・デルマス訳（1983），「地球を測った男たち」，リブロポート，Trystram, Florence (1979), Le proces des etoiles, Paris: Séghere

[20] 横山泉監修（1978），「地球一新地学教育講座1」，東海大学出版会

[21] 渡辺一郎（1999），「伊能忠敬の歩いた日本」，ちくま選書206

補論1 諸推定結果

ガウス［7］は，4個の孤長についてのフランス・データを使って，$S=2565006$，$\varepsilon=1/187$を与えた．ペルー・データは使っていないことを明言している．スティグラーは様々な推定を試みたが，この数値を再現することができなかった．（スティグラー［17］, p.471, p.473）ガウスの結果は，他のフランス・データを用いた結果と比べると，違いが大きい．ハーター［9］（pp.153-154）は，他の扁平率の計算も紹介している．

スティグラー［17］（p.469）は（13）式とフランスの4区間のデータを用い，最小2乗法により四分孤長$S=2564801.46$，$\varepsilon=1/157.95$と求めた．

数値の精度によっても，結果に多少の差異が生じる．200年前は三角関数とπをできるだけ避けて計算したであろうから，（9）式のように近似$\sin(x°)\simeq x°l, (l=\pi/180°)$を使うと，（7）式より

$$\frac{s'}{\phi'-\phi}=s+s\varepsilon\left[-\frac{3}{2}\cos(2L)\right]+s\varepsilon^2\left[\frac{15}{16}\cos(\phi'-\phi)\cos(4L)-\frac{3}{4}\cos(2L)\right] \tag{16}$$

$$=e+f\left[-\frac{3}{2}\cos(2L)\right]+g\left[\frac{15}{16}\cos(\phi'-\phi)\cos(4L)-\frac{3}{4}\cos(2L)\right] \tag{17}$$

となる．この回帰式をフランスの4区間データを用いて推定してみた．ただし，左辺は1ラジアン当たりの距離ではなく，表で示された1度当たりの距離を使う．（1ラジアン当たりの距離を使うと，誤差が影響して結果に非常に大きな違いが生じる．）このため，右辺の係数は全てlが掛かるが，sを1度当たりの孤長と理解すれば，式並び推定に何ら変更は生じない．

係数間の制約を考えずに回帰式の推定をすると，多重共線性の為に，係数は，$e=28293.22$，$f=312.994$，$g=-222.22$となり，孤長と扁平率は$S=2546389.86$，$\varepsilon=1/90.396$となって，かなり違いが出る．（この様な計算は，ラプラスのボーディッチによる注，pp, 453-454，エアリ，p565，p. 570に見られる．）係数間の制約付き回帰推定では$e=28498.84$，$f=179.72$，$g=f^2/e$となり，孤長と扁平率は$S=2564895.6$，$\varepsilon=1/158.583$で，スティグラーに近い．回帰式の第3項を除いて推定すると，$e=28497.79$，$f=180.4187$となり，孤長と扁平率はS=2564801.1，$\varepsilon=1/157.95$となってスティグラーと変わらない．

（7）式も推定したが，$S=2564801.564$，$\varepsilon=1/157.92$となり，スティグラーの計算と変わらない．ペルー・データも利用すると，$S=2565397.694$，$\varepsilon=1/320.738$となり，推定値が大きく変化することが分かる．

回帰式の左辺をラジアン角度差とする．つまり

$$\phi'-\phi=\frac{s'}{s}+\varepsilon\frac{3}{2}\sin(\phi'-\phi)\cos(\phi'+\phi). \tag{18}$$

フランス・データに関してこの式を最小2乗法で推定すると，$S=2564771.04$，$\varepsilon=1/150.675$となる．関数式（functional relation)であるので，直交回帰による計算もしたが，結果は変わらない．

筆者はフランスの計測結果をパリの北区間ダンケルク―パンテオンと，パリの南区間パンテオン―モンジョイに二分してラプラスと同様の計算をしてみた．北区間に関して

$$\frac{62472.59}{2.1891^\circ}=sl-(s\varepsilon)\frac{3}{2}\frac{\sin(2.1891^\circ)}{2.1891^\circ}\cos(49.9417^\circ\times2),$$

南区間については

$$\frac{213319.77}{7.4847^\circ}=sl-(s\varepsilon)\frac{3}{2}\frac{\sin(7.4847^\circ)}{7.4847^\circ}\cos(45.1047^\circ\times2)$$

となる．計算すると，$S=2564998.0$，$\varepsilon=1/192.8$で，ガウスが得た距離とは8ダブルトアーズの差がある．1ラジアン当たりの弧長は，$s=1632928.4429$となる．長径は，$a=1637171.4668$. このような分割に関して様々な試みをしてみたが，これ以上ガウスに近い結果は得ることができなかった．ラプラスの様に二次の項まで入れて同様の計算をすると，$S=2565066$になり58ダブルトアーズ超過するが，εは変化しない．

補論2　ルジャンドル(1805,pp.76–80)の計算

ルジャンドルの補論では，最小2乗法の計算法が説明され，またそのフランス・データへの応用が含まれている．この応用は，スティグラー［18］のpp. 59–60でも解説されているが，誤差項の扱いが特殊であるので，ここで詳細を説明する．

計算の元となる式は（18）式であるが，一度あたりの弧長sを$28500/(1+\zeta)$と分解して，

$$\begin{aligned}&-(\phi'-\phi)+\frac{s'}{s}+\varepsilon\frac{3}{2}\sin(\phi'-\phi)\cos(\phi'+\phi)\\&\quad=-(\phi'-\phi)+\frac{s'}{28500}+\zeta\frac{s'}{28500}+\varepsilon\frac{3}{2}\frac{180}{\pi}\sin(\phi'+\phi)\cos(\phi'+\phi)\end{aligned}$$

とする．ただし，ルジャンドルは誤差が4個の弧の端点で生じるとし，例えば最初のDP弧に対しては

$$\begin{aligned}E1-E2&=-(2.189097)+\frac{62472.59}{28500}+\zeta\frac{62472.59}{28500}\\&\quad+\alpha\frac{270}{\pi}\sin\ (2.1891^\circ)\cos(49.9417^\circ\times2)\\&=0.002924+2.192\,\zeta-0.563\,\alpha,\end{aligned} \tag{19}$$

と式を定める．同様に他の区間については，原論文とは多少数値が異なってくるが，

$$E2-E3=0.003100+2.672\zeta-0.351\alpha, \tag{20}$$
$$E3-E4=-0.001097+2.962\zeta+0.047\alpha, \tag{21}$$
$$E4-E5=-0.001800+1.851\zeta+0.263\alpha \tag{22}$$

となる．左辺を無視し，右辺第一項を被説明変数として，定数項のない4式の未知係数を最小2乗法で推定すると，扁平率$=1/\alpha=1/150.44$，四分弧長$S=90/(1+\zeta)=2564768.597$となる．(18) 式の推定結果とは小数点以下の処理で異なるが，これが標準的な計算であろう．

ルジャンドルは誤差の処理が特異で，この4式を

$$E1=E3+0.006024+4.864\zeta-0.914\alpha, \tag{23}$$
$$E2=E3+0.003100+2.672\zeta-0.351\alpha, \tag{24}$$
$$E4=E3+0.001097-2.962\zeta-0.047\alpha, \tag{25}$$
$$E5=E3+0.002897-4.813\zeta-0.310\alpha \tag{26}$$

と表現する．ここで，誤差に関して

$$E1+E2+E3+E4+E5=0 \tag{27}$$

という条件を置くと，一個の誤差が余分になるので

$$E3=-0.002624+0.0478\zeta+0.3244\alpha \tag{28}$$

と求める．この式を各式に代入すると，

$$E1=0.003400+4.912\zeta-0.590\alpha, \tag{29}$$
$$E2=0.000476+2.720\zeta-0.027\alpha, \tag{30}$$
$$E4=-0.001527-2.914\zeta+0.277\alpha, \tag{31}$$
$$E5=0.000273-4.765\zeta+0.014\alpha \tag{32}$$

と整理できる．次に2乗和

$$E1^2+E2^2+E3^2+E4^2+E5^2$$

を未知係数ζとαに関して最小化すると正規方程式が求まり，最小2乗推定値が得られる．扁平率$=1/\alpha=1/148$，四分弧長$S=2564800.2$となる．ルジャンドルの方法は，(28) 式から (32) 式までの定数項が含まれない5式に最小2乗法を応用していると考えてよい．

【著者略歴】
森棟　公夫（もりむね　きみお）
1946年 東京都生まれ

所属・現職	椙山女学園大学　現代マネジメント学部　教授
最終学歴・学位	京都大学大学院経済学研究科博士課程修了
	京都大学経済学博士　スタンフォード大学Ph.D.
所属学会	日本経済学会　日本統計学会　など
専攻領域	計量経済学，統計学
主要著書	「計量経済学」（東洋経済新報社，1999年）
	「統計学入門 第二版」（新世社，2000年）
	「NLASシリーズ 統計学」[共著]（有斐閣，2008年）など．