

原著 (Article)

冪零型特異2階非線形偏微分方程式に対する マイエ型定理 (1)

Maillet Type Theorem for Singular 2nd Order Nonlinear
Partial Differential Equations of Nilpotent Type, Part I

白井 朗*
SHIRAI, Akira*

キーワード：冪零型方程式，特異2階偏微分方程式，形式的冪級数解，発散級数，
ポレル変換，ジュブレイ度，マイエ型定理

1 序と主定理

\mathbb{C} を複素数の集合とし， $M_n(\mathbb{C})$ を複素数を成分とする n 次正方行列の集合とする．変数を $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ とし， $\partial / \partial x_j = \partial_j$ ， $\partial_x = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ とするとき，次の形の作用素を「特異1階偏微分作用素」という．

$$xA^t \partial_x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \partial_j \quad (\text{ただし, } A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})).$$

特に， A が冪零行列の場合は「冪零型特異1階偏微分作用素」と呼ばれる．本稿では，次の形の冪零型特異1階偏微分作用素 L_k ($k=1,2$) を考える．

$$L_k = xA_k^t \partial_x \quad (k=1,2). \quad (1.1)$$

ただし， $A_k = \text{diag}(N_{k,1}, N_{k,2}, \dots, N_{k,p_k})$ はサイズが n のブロック対角行列を表し，また，行列 $N_{k,i}$ ($k=1,2; i=1,2,\dots,p_k$) は次の形をした，サイズが $n_{k,i}$ の冪零行列とする．

$$N_{k,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \delta_{k,i,1} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \delta_{k,i,n_{k,i}-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\delta_{k,i,j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

ここで， $n_{k,i}=1$ の場合は $N_{k,i} = (0)$ を表し，また $n_{k,1} + n_{k,2} + \dots + n_{k,p_k} = n$ であることに注意する．

本稿では上記の冪零型特異1階偏微分作用素を用いて得られる偏微分作用素 $L_1 L_2$ を「冪零型特異2階偏微分作用素」と呼ぶこととし， $L = L_1 L_2 + 1$ を主部にもつ非線形偏微分方程式（下記(1.3)参照）の形式的冪級数解（以下，「形式解」と略す）の発散の度合いを評価することを目的とする．このような形式解の発散の度合いを求めた結果を「マイエ型定理」と呼ぶ．1階の特異偏微分方程式に対するマイエ型定理は，今回扱う冪零型作用素を用いた $L_k + 1$ ($k=1,2$) や，より一般の特異1階偏微分作用素に関して，筆者を含め何人もの研究者によって研究が進められ，多くのマイエ型定理が得られている ([2], [4], [6], [7], [8] など)．

これに対して、2 階の特異非線形偏微分方程式においては、1 階ほど詳細であり一般的な結果を述べているマイエ型定理は得られておらず、今後研究を進める余地は多分にある。本稿は、一般の特異 2 階非線形偏微分方程式の発散冪級数解に対するマイエ型定理を得るための導入的かつ例題的な位置づけであり、一般論への足掛かりを得るべく考察したものである。

$N_{k,j}$ を上記の冪零行列とする。ここで、 $i=1,2,\dots,p_k; j=1,2,\dots,n_{k,i}$ に対して、 $[i,j]_k \in \mathbb{N}$ を次で定義する。

$$[1,j]_k = j, \quad [i,j]_k = j + n_{k,1} + n_{k,2} + \dots + n_{k,i-1}, \quad (i \geq 2).$$

この定義から、

$$[i,j+1]_k = [i,j]_k + 1, \quad [i+1,1]_k = [i,n_{k,i}]_k + 1$$

が成り立つことが分かる。このことから、 $[i,j]_k$ が 1 から n までの自然数を表すことが従う。このとき、冪零型特異 1 階偏微分作用素 (1.1) は次のように書き換えられる。

$$L_k = \sum_{i=1}^{p_k} \sum_{j=1}^{n_{k,i}-1} \delta_{k,i,j} x_{[i,j]_k+1} \partial_{[i,j]_k}, \quad (k=1,2). \quad (1.2)$$

L を L_1 と L_2 の合成を用いて $L = L_1 L_2 + 1$ とし、次の方程式を考える。

$$\begin{cases} Lu(x) = \sum_{|\alpha|=K} a_\alpha x^\alpha + f_{K+1}(x, u, \partial_x u, \partial_x^2 u), \\ u(x) = O(|x|^K), \end{cases} \quad (1.3)$$

ただし、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ に対し、 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ を表し、また、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し、 $|x| = x_1 + \dots + x_n$ 、 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ を表す。さらに、 $\partial_x u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ 、 $\partial_x^2 u = (\partial_{11}^2 u, \partial_{12}^2 u, \dots, \partial_{nn}^2 u)$ ($\partial_{ij}^2 u = \partial_i \partial_j u$) である。ここで、 $\partial_x u$ は n 個の成分から成り、 $\partial_x^2 u$ は $n(n+1)/2$ 個の成分から成ることを注意する。また、 $a_\alpha \in \mathbb{C}$ ($|\alpha| = K$, K は $K \geq 3$ を満たす自然数)、関数 $f_{K+1}(x, u, \xi^1, \xi^2)$ は原点の近傍で正則で、次の形のテイラー展開を持つとする。

$$f_{K+1}(x, u, \xi^1, \xi^2) = \sum_{V(\alpha, h, \beta, \gamma) \geq K+1} f_{\alpha h \beta \gamma} x^\alpha u^h (\xi^1)^\beta (\xi^2)^\gamma. \quad (1.4)$$

ここで、 $\xi^1 \in \mathbb{C}^n$ 、 $\xi^2 \in \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ であり、 $V(\alpha, h, \beta, \gamma)$ は以下の (1.5) として定義され、これは $f_{K+1}(x, u(x), \partial_x u(x), \partial_x^2 u(x))$ のテイラー展開の各項の零点の位数を表すものである。

$$V(\alpha, h, \beta, \gamma) = |\alpha| + Kh + (K-1)|\beta| + (K-2)|\gamma|. \quad (1.5)$$

ただし、 $|\beta|$ 、 $|\gamma|$ はベクトル $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ 、 $\gamma \in \mathbb{N}_0^{\frac{n(n+1)}{2}}$ の成分の和を表す。

さて、

$$\begin{aligned} s^{0,1} &= (s_1^{0,1}, \dots, s_n^{0,1}) = (1, 2, \dots, n_{1,1}, 1, 2, \dots, n_{1,2}, \dots, 1, 2, \dots, n_{1,p_1}), \\ s^{0,2} &= (s_1^{0,2}, \dots, s_n^{0,2}) = (1, 2, \dots, n_{2,1}, 1, 2, \dots, n_{2,2}, \dots, 1, 2, \dots, n_{1,p_2}) \end{aligned}$$

と定義し, $s^0 := s^{0,1} * s^{0,2} = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) \in \mathbb{N}^n$ を次の関係式で帰納的に定める.

$$s_j^0 = \begin{cases} 1 & (s_j^{0,1} = s_j^{0,2} = 1 \text{ のとき}), \\ s_{j-1}^0 + 1 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

このとき, s^0 は次のような形になる.

$$\begin{aligned} s^0 &= (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) \\ &=: (1, 2, \dots, n'_1, 1, 2, \dots, n'_2, \dots, 1, 2, \dots, n'_p). \end{aligned} \quad (1.6)$$

($n'_1 + \dots + n'_p = n$ であることに注意). 例えば, $x = (x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{C}^9$ に対して,

$$\begin{aligned} L_1 &= x_2 \partial_1 + x_3 \partial_2 + x_5 \partial_4 + x_6 \partial_5 + x_8 \partial_7, \\ L_2 &= x_3 \partial_2 + x_5 \partial_4 + x_7 \partial_6 \end{aligned}$$

を考える場合,

$$s^{0,1} = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 1), \quad s^{0,2} = (1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1)$$

なので, $s^0 = s^{0,1} * s^{0,2} = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 1)$ となる.

さて, $i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n'_i$ に対して,

$$[1, j] = j, \quad [i, j] = j + n'_1 + \dots + n'_{i-1} \quad (i \geq 2) \quad (1.7)$$

と書くとき, 先ほどの $[i, j]_k$ と同様に, $[i, j]$ も 1 から n までの自然数の列を与える. このとき, (1.6) で定まる s^0 の成分 $s_{[i, j]}^0$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n'_i$) は,

$$s_{[i, j]}^0 = j \quad (1.8)$$

となることに注意する. 実際, 上の例では $n'_1 = 3$, $n'_2 = 5$, $n'_3 = 1$ であり,

$$\begin{aligned} s^0 &= (1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 1) \\ &= (s_1^0, s_2^0, s_3^0, s_4^0, s_5^0, s_6^0, s_7^0, s_8^0, s_9^0) \\ &= (s_{[1,1]}^0, s_{[1,2]}^0, s_{[1,3]}^0, s_{[2,1]}^0, s_{[2,2]}^0, s_{[2,3]}^0, s_{[2,4]}^0, s_{[2,5]}^0, s_{[3,1]}^0) \end{aligned}$$

であるから, $s_{[i, j]}^0 = j$ であることが確認できる. また, これに対応する変数を

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \\ &= (x_{[1,1]}, \dots, x_{[1, n'_1]}, x_{[2,1]}, \dots, x_{[2, n'_2]}, \dots, x_{[p,1]}, \dots, x_{[p, n'_p]}) \\ &= (x_{[i, j]})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, n'_i} \end{aligned} \quad (1.9)$$

と表記する. このとき f_{K+1} のテイラー展開に登場する ξ^1 , ξ^2 は

$$\begin{aligned} \xi^1 &= (\xi_{[i, j]}^1)_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, n'_i} \in \mathbb{C}^n, \\ \xi^2 &= (\xi_{2[i, j][k, \ell]}^2)_{i, k=1, \dots, p; j=1, \dots, n'_i; \ell=1, \dots, n'_k} \in \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

であり(ただし, ξ^2 の成分の添え字は $[i, j] \leq [k, \ell]$ を満たすとする), また, $(\xi^1)^\beta$, $(\xi^2)^\gamma$ は

$$(\xi^1)^\beta = \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{n'_i} (\xi_{1,i,j})^{\beta_{ij}} \\
 (\xi^2)^\gamma = \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{n'_i} \prod_{k=1}^p \prod_{\ell=1}^{n'_k} (\xi_{2,i,j,k,\ell})^{\gamma_{ijk\ell}}$$

とする. ここで, 整数 $M(\alpha, h, \beta, \gamma)$ を次で定義する.

$$M(\alpha, h, \beta, \gamma) = \begin{cases} \max\{q, j + \ell\} & (\beta_{pq} \neq 0, \gamma_{ijk\ell} \neq 0), \\ 0 & (\beta = 0, \gamma = 0). \end{cases} \quad (1.10)$$

次の定理が本稿の主定理である.

定理 1 (主定理) 方程式 (1.3) は形式解 $u(x) = \sum_{|\alpha| \geq K} u_\alpha x^\alpha$ を一意に持ち, その発散の度合いは高々 $s = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^n$ である. すなわち, 級数

$$\sum_{|\alpha| \geq K} \frac{u_\alpha}{\alpha!^{s-1}} x^\alpha \quad (1.11)$$

は原点の近傍で収束する. ただし, $\alpha!^{s-1} = \alpha_1!^{s_1-1} \dots \alpha_n!^{s_n-1}$ を表し, 発散の度合い $s = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^n$ は次で与えられるものである.

$$s = (s_1, \dots, s_n) = s^0 + (\sigma, \sigma, \dots, \sigma), \quad (1.12)$$

ここで, σ は

$$\sigma = \max_{\alpha, h, \beta, \gamma} \left\{ \frac{M(\alpha, h, \beta, \gamma)}{V(\alpha, h, \beta, \gamma) - K}; f_{\alpha h \beta \gamma} \neq 0 \right\} \quad (1.13)$$

で定義される非負有理数を表す.

注意 1 $\tilde{n} = \max\{n'_1, \dots, n'_p\}$ とすると, s^0 の定義から $\tilde{n} = \max\{s_1^0, \dots, s_n^0\}$ が得られる. また, $M(\alpha, h, \beta, \gamma)$ は $M(\alpha, h, \beta, \gamma) \leq 2\tilde{n}$ と評価できる. よって, この評価と $V(\alpha, h, \beta, \gamma) \geq K+1$ を合わせると, $\sigma \leq 2\tilde{n}$ も得られる. 従って, 定理 1 より, 形式解の発散の度合いは高々 $3\tilde{n}$ であることが分かる.

2 ボレル変換とジュブレイ空間

$\mathbb{C}[[x]]$ を変数が $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ の形式的冪級数全体の集合とする.

定義 1 (ボレル変換) $s = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^n$ とする. 形式的冪級数 $u(x) = \sum u_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ に対して, s -ボレル変換 $\mathcal{B}_x^s(u)(x)$ を

$$\mathcal{B}_x^s(u)(x) = \sum \frac{u_\alpha |\alpha|!}{(s \cdot \alpha)!} x^\alpha \quad (2.1)$$

で定義する. ただし, $s \cdot \alpha = s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n$, $(s \cdot \alpha)! = \Gamma(s \cdot \alpha + 1)$ (ガンマ関数)を表す.

定義 2 (ジュブレイ空間) 形式的冪級数 $u(x) = \sum u_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ がジュブレイ空間 \mathcal{G}_x^s に属するとは, その s -ボレル変換 $\mathcal{B}_x^s(u)(x)$ が原点の近傍で収束するときをいう. また, $s = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^n$ を各変数に対するジュブレイ度という. 特に, $s = \mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1) \in$

$(\mathbb{R}_{\geq 1})^n$ のとき, $\mathcal{G}_x^{1_n} = \mathbb{C}\{x\}$ (収束冪級数全体の集合)であることに注意する.

注意 2 定理 1 に登場する (1.11) と, 定義 1 で定めたボレル変換 (2.1) は一般には収束領域に差があり完全に一致するわけではないが, 原点近傍で収束するか否かについては (1.11) と (2.1) は同値である. すなわち,

$$(1.11) \text{ が収束する. } \iff (2.1) \text{ が収束する.} \quad (2.2)$$

が成り立つ. よって, 定理 1 を示すためには, $\mathcal{B}_x^s(u)(x)$ が収束することを示せばよい.

注意 3 任意の $s, s' \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^n$ に対して, $\mathcal{B}_x^s(u)(x) \in \mathcal{G}_x^{s'}$ ならば, $u(x) \in \mathcal{G}_x^{s+s'-1_n}$ (ただし $1_n = (1, 1, \dots, 1)$ を表す) が成り立つ. s と s' を加えるだけでなく 1_n を引いているのは, 収束級数のジュブレイ度を 1_n としていることに起因する.

3 作用素 L の可逆性と逆作用素 L^{-1} の評価

$s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) = (1, \dots, n'_1, 1, \dots, n'_2, \dots, 1, \dots, n'_p)$ に対して, 対応する変数は

$$\begin{aligned} x &= (x_{[1,1]}, \dots, x_{[1,n'_1]}, x_{[2,1]}, \dots, x_{[2,n'_2]}, \dots, x_{[p,1]}, \dots, x_{[p,n'_p]}) \\ &= (x_{[i,j]})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, n'_i} \end{aligned}$$

であり, 逆に, 変数 $x_{[i,j]}$ ($i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n'_i$) に対応する s^0 の成分の値は $s_{[i,j]}^0 = j$ であった.

このとき, (1.2) で定義された作用素 $L_k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n'_{k,i}-1} \delta_{k,i,j} x_{[i,j]+1} \partial_{[i,j]}$ ($k=1, 2$) を用いて表される作用素 $L = L_1 L_2 + 1$ は次のような形で表される.

$$\begin{aligned} L &= 1 + L_1 L_2 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n'_i-2} \delta_{ij}^{(1)} x_{[i,j]+2} \partial_{[i,j]} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n'_i-1} \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{n'_{k,i}-1} \delta_{ijk\ell}^{(2)} x_{[i,j]+1} x_{[k,\ell]+1} \partial_{[i,j]}^2 \\ &=: 1 + L^{(1)} + L^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし, $\delta_{ij}^{(1)}, \delta_{ijk\ell}^{(2)} \in \mathbb{C}$ を表す (これらのうちのいくつかは 0 となる可能性あり).

注意 4 $\delta_{ij}^{(1)}, \delta_{ijk\ell}^{(2)}$ の大きさは任意に小さいと仮定してよい. 実際, 任意の定数 $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を用いて変数を $x_{[i,j]} = \varepsilon^{[i,j]} \hat{x}_{[i,j]}$ と線形変換すると, 係数は

$$\delta_{ij}^{(1)} \mapsto \varepsilon^2 \delta_{ij}^{(1)}, \quad \delta_{ijk\ell}^{(2)} \mapsto \varepsilon^2 \delta_{ijk\ell}^{(2)}$$

に変わるので, 初めに $|\varepsilon|$ を任意に小さく選んでおけば, 係数の大きさはいくらでも小さくできる.

作用素 L の可逆性と逆作用素 L^{-1} の評価に関して, 次が成り立つ.

補題 1 $\mathbb{C}[x]_k$ を x について k 次斉次多項式全体の集合とする. 任意の $k \geq K (\geq 3)$ に対して, 次が成り立つ.

- (1) (3.1) で定義される作用素 L は $\mathbb{C}[x]_k$ 上可逆.
- (2) $s^0 = (s_1^0, \dots, s_n^0) = (1, \dots, n'_1, 1, \dots, n'_2, \dots, 1, \dots, n'_p)$ とする. また, $u(x) \in \mathbb{C}[x]_k$ に対して, $\mathcal{B}_x^{s^0}(u)(x) \ll W_k X^k$ ($X = |x| = x_1 + \dots + x_n$) が成り立つとする. このとき, k に依存しない正定数 $C_1 > 0$ が存在して, 次の優級数関係が成り立つ.

$$\mathcal{B}_x^{s^0}(L^{-1}u)(x) \ll C_1 W_k X^k. \quad (3.2)$$

(証明) (1) について. $\mathbb{C}[x]_k$ の基底 $\{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}\}_{i_1 + \dots + i_n = k}$ に対して, (i_1, i_2, \dots, i_n) に

$$(k, 0, 0, \dots, 0) \succ (k-1, 1, 0, \dots, 0) \succ \dots \succ (0, 0, \dots, 0, k)$$

と辞書式に順序を入れる. すなわち, 基底の列を $x = {}^t(x_1^k, x_1^{k-1}x_2, x_1^{k-1}x_3, \dots, x_n^k)$ と並べる. このとき, 線形作用素 L の行列表現が M , すなわち, $Lx = Mx$ であったとすると, M は対角成分がすべて 1 の三角行列となることが分かる. 従って, M は可逆である. これは L が $\mathbb{C}[x]_k$ 上可逆であることを示している.

- (2) $u(x) = \sum_{|\alpha|=K} u_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x]_k$ に対して, s -ノルム $\|u\|_s$ を

$$\|u\|_s = \min\{A > 0; \mathcal{B}_x^s(u)(x) \ll AX^k\} \quad (3.3)$$

$$= \max_{|\alpha|=k} \left\{ |u_\alpha| \frac{\alpha!}{(s \cdot \alpha)!} \right\} = \max_{|\alpha|=k} \left\{ |u_\alpha| \frac{\alpha_1! \dots \alpha_n!}{(s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n)!} \right\} \quad (3.4)$$

で定める.

まず, $L^{(1)}$ について考える. そのために $\delta_{ij}^{(1)} x_{[i,j]+2} \partial_{[i,j]} u$, ($i=1, \dots, p$; $j=1, \dots, n'_i-2$) を考える. $u = \sum_{|\alpha|=K} u_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x]_k$ において,

$$\delta_{ij}^{(1)} x_{[i,j]+2} \partial_{[i,j]} u = \sum_{|\alpha|=k, \alpha_{[i,j]} \geq 1} \delta_{ij}^{(1)} \alpha_{[i,j]} u_\alpha x^{\alpha'},$$

ただし, $\alpha' = \alpha - e([i,j]) + e([i,j]+2)$ なので (ここで $e(k)$ は k 番目の成分のみが 1 で残りがすべて 0 である基本ベクトルを表す), ノルムの計算をすると,

$$\begin{aligned} & \|\delta_{ij}^{(1)} x_{[i,j]+2} \partial_{[i,j]} u\|_{s^0} \\ &= \max_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_{[i,j]} \geq 1}} \left\{ \left| \delta_{ij}^{(1)} \right| \times |u_\alpha| \frac{\alpha_{[i,j]}!}{(s^0 \cdot \alpha)!} \right\} \\ &= \max_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_{[i,j]} \geq 1}} \left\{ \left| \delta_{ij}^{(1)} \right| \times |u_\alpha| \frac{(\alpha_{[i,j]} + 2)\alpha!}{(s^0 \cdot (\alpha - e([i,j]) + e([i,j]+2)))!} \right\} \\ &\leq \max_{|\alpha|=k} \left\{ \left| \delta_{ij}^{(1)} \right| \times |u_\alpha| \frac{(\alpha_{[i,j]} + 1 + 2)\alpha!}{(s^0 \cdot \alpha + 2)!} \right\} \\ &= \max_{|\alpha|=k} \left\{ \left| \delta_{ij}^{(1)} \right| \times |u_\alpha| \frac{(\alpha_{[i,j]} + 2 + 1)\alpha!}{(s^0 \cdot \alpha + 2)(s^0 \cdot \alpha + 1)(s^0 \cdot \alpha)!} \right\} \\ &\leq \left| \delta_{ij}^{(1)} \right| \times \max_{|\alpha|=k} \left\{ \frac{|u_\alpha| \alpha!}{(s^0 \cdot \alpha)!} \right\} \\ &= \left| \delta_{ij}^{(1)} \right| \times \|u\|_{s^0} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって作用素ノルムは

$$\|\delta_{ij}^{(1)} x_{[i,j]+2} \partial_{[i,j]}\|_{s^0} \leq \|\delta_{ij}^{(1)}\|$$

と評価できる. 従って,

$$\|L^{(1)}\|_{s^0} = \left\| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n'_i-2} \delta_{ij}^{(1)} x_{[i,j]+2} \partial_{[i,j]} \right\|_{s^0} \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n'_i-2} |\delta_{ij}^{(1)}| \leq n \times \max\{|\delta_{ij}^{(1)}|\} \quad (3.5)$$

が得られる.

次に $L^{(2)}$ について考える. そのためにまず $(i, j) \neq (k, \ell)$ の場合における

$$\delta_{ijk\ell}^{(2)} x_{[i,j]+1} x_{[k,\ell]+1} \partial_{[i,j][k,\ell]}^2 u,$$

($i=1, \dots, p; j=1, \dots, n'_i-1; k=1, \dots, p; \ell=1, \dots, n'_k-1$) を考える.

$$\delta_{ijk\ell}^{(2)} x_{[i,j]+1} x_{[k,\ell]+1} \partial_{[i,j][k,\ell]}^2 u = \sum_{|\alpha|=k, \alpha_{[i,j]} \geq 1, \alpha_{[k,\ell]} \geq 1} \delta_{ijk\ell}^{(2)} \alpha_{[i,j]} \alpha_{[k,\ell]} u_\alpha x^{\alpha'}$$

ただし,

$$\alpha' = \alpha - e([i, j]) - e([k, \ell]) + e([i, j] + 1) + e([k, \ell] + 1)$$

となるので, このときノルムを計算すると

$$\begin{aligned} & \|\delta_{ijk\ell}^{(2)} x_{[i,j]+1} x_{[k,\ell]+1} \partial_{[i,j][k,\ell]}^2 u\|_{s^0} \\ &= \max_{\substack{|\alpha|=k, \\ \alpha_{[i,j]} \geq 1, \\ \alpha_{[k,\ell]} \geq 1}} \left\{ \frac{|\delta_{ijk\ell}^{(2)}| |u_\alpha| \alpha_{[i,j]} \alpha_{[k,\ell]} \alpha'^!}{(s^0 \cdot \alpha')!} \right\} \\ &\leq \max_{|\alpha|=k} \left\{ \frac{|\delta_{ijk\ell}^{(2)}| |u_\alpha| (\alpha_{[i,j]} + 1)(\alpha_{[k,\ell]} + 1) \alpha!}{(s^0 \cdot \alpha + 2)!} \right\} \\ &= \max_{|\alpha|=k} \left\{ \frac{|\delta_{ijk\ell}^{(2)}| |u_\alpha| (\alpha_{[i,j]} + 1)(\alpha_{[k,\ell]} + 1) \alpha!}{(s^0 \cdot \alpha + 2)(s^0 \cdot \alpha + 1)(s^0 \cdot \alpha)!} \right\} \\ &\leq |\delta_{ijk\ell}^{(2)}| \times \max_{|\alpha|=k} \left\{ \frac{|u_\alpha| \alpha!}{(s^0 \cdot \alpha)!} \right\} \\ &= |\delta_{ijk\ell}^{(2)}| \times \|u\|_{s^0} \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $(i, j) \neq (k, \ell)$ における作用素ノルムは

$$\|\delta_{ijk\ell}^{(2)} x_{[i,j]+1} x_{[k,\ell]+1} \partial_{[i,j][k,\ell]}^2\|_{s^0} \leq |\delta_{ijk\ell}^{(2)}|$$

と評価できる.

また, $(i, j) = (k, \ell)$ の場合における

$$\delta_{ijj}^{(2)} (x_{[i,j]+1})^2 \partial_{[i,j][i,j]}^2 u,$$

($i=1, \dots, p; j=1, \dots, n'_i-1$) についても同様に計算すれば,

$$\|\delta_{ijj}^{(2)} (x_{[i,j]+1})^2 \partial_{[i,j][i,j]}^2\|_{s^0} \leq |\delta_{ijj}^{(2)}|$$

が成り立つ．以上のことを合わせると，

$$\begin{aligned} \|L^{(2)}\|_{s^0} &= \left\| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i'-1} \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{n_k'-1} \delta_{ijk\ell}^{(2)} x_{[i,j]+1} x_{[k,\ell]+1} \partial_{[i,j][k,\ell]}^2 \right\|_{s^0} \\ &\leq n^2 \times \max\{|\delta_{ijk\ell}^{(2)}|\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

と評価できる．

従って，(3.5)，(3.6) から，

$$\|L^{(1)} + L^{(2)}\|_{s^0} \leq n \times \max\{|\delta_{ij}^{(1)}|\} + n^2 \times \max\{|\delta_{ijk\ell}^{(2)}|\}$$

が成り立つ．ここで注意 4 で述べたように，係数は任意に小さくできるので，

$$\max\{|\delta_{ij}^{(1)}|\}, \max\{|\delta_{ijk\ell}^{(2)}|\}$$

も任意に小さいとしてよい．よって，例えば

$$n \times \max\{|\delta_{ij}^{(1)}|\} + n^2 \times \max\{|\delta_{ijk\ell}^{(2)}|\} \leq \frac{1}{2}$$

となるように小さく取っておけば， $\|L^{(1)} + L^{(2)}\|_{s^0} \leq 1/2$ が成り立つ．このとき， L^{-1} の作用素ノルムの評価はノイマン級数を用いて

$$\begin{aligned} \|L^{-1}\|_{s^0} &= \|(1 + L^{(1)} + L^{(2)})^{-1}\|_{s^0} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|L^{(1)} + L^{(2)}\|_{s^0}} \leq 2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

であることが分かり， $C_1 = 2$ とおくことで補題 1，(2) が示された． (証明終わり)

4 定理 1 (主定理) の証明

補題 1 より， L は可逆なので， $Lu(x) = U(x)$ とおくと， U は次の方程式を満たす．

$$\begin{cases} U(x) = \sum_{|\alpha|=K} a_\alpha x^\alpha + f_{K+1}(x, L^{-1}U, \partial_x L^{-1}U, \partial_x^2 L^{-1}U), \\ U = O(|x|^K). \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 一意性の証明

補題 1 より， $L: \mathbb{C}[x]_k \rightarrow \mathbb{C}[x]_k$ は可逆なので， $L^{-1}: \mathbb{C}[x]_k \rightarrow \mathbb{C}[x]_k$ である．よって，(4.1) の形式解を $U(x) = \sum_{k \geq K} U_k(x)$ ($U_k(x) \in \mathbb{C}[x]_k$) と斉次多項式に分解して考えると，

$$\begin{aligned} L^{-1}U &= \sum_{k \geq K} L^{-1}U_k(x), & L^{-1}U_k(x) &\in \mathbb{C}[x]_k, \\ \partial_i L^{-1}U &= \sum_{k \geq K} \partial_i L^{-1}U_k(x), & \partial_i L^{-1}U_k(x) &\in \mathbb{C}[x]_{k-1}, \\ \partial_{ij}^2 L^{-1}U &= \sum_{k \geq K} \partial_{ij}^2 L^{-1}U_k(x), & \partial_{ij}^2 L^{-1}U_k(x) &\in \mathbb{C}[x]_{k-2}, \end{aligned}$$

となる．これらを (4.1) に代入して，次数で整理すると次の漸化式を得る．

$$(\ast) \left\{ \begin{array}{l} U_K(x) = \sum_{|\alpha|=K} a_\alpha x^\alpha, \quad (k=K \text{ のとき}), \\ U_k(x) = \sum_{V(\alpha, h, \beta, \gamma) \geq K+1} \sum' f_{\alpha h \beta \gamma} \prod_{j=1}^h L^{-1} U_{k_j} \\ \quad \times \prod_{\ell=1}^n \prod_{j=1}^{\beta_\ell} \partial_\ell L^{-1} U_{k_{\ell,j}} \prod_{\ell=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j=1}^{\gamma_\ell} \partial_{(\ell)}^2 L^{-1} U_{m_{\ell,j}}, \quad (k \geq K+1 \text{ のとき}). \end{array} \right.$$

ただし, $\partial_{(\ell)}^2$ は $\partial_{(\ell)}^2 = \partial_{jk}^2$ ($\ell = (j-1)(2n-j)/2 + k, 1 \leq j \leq n$) で定める. 具体的には

$$\partial_{(1)}^2 = \partial_{11}^2, \partial_{(2)}^2 = \partial_{12}^2, \dots, \partial_{(n)}^2 = \partial_{1n}^2, \partial_{(n+1)}^2 = \partial_{22}^2, \dots, \partial_{(\frac{n(n+1)}{2})}^2 = \partial_{nn}^2$$

である. また, \sum' は以下の条件の上での和を表す.

$$|\alpha| + \sum_{j=1}^h k_j + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{\beta_\ell} (k_{\ell,j} - 1) + \sum_{\ell=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{j=1}^{\gamma_\ell} (m_{\ell,j} - 2) = k.$$

上記 (\ast) は一意に定まる漸化式になっている. 実際, $k_j \geq K$, $k_{\ell,j} \geq K$, $m_{\ell,j} \geq K$ であり, また,

$$V(\alpha, h, \beta, \gamma) = |\alpha| + Kh + (K-1)|\beta| + (K-2)|\gamma| \geq K+1$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} k &= |\alpha| + \sum_{j=1}^h k_j + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{\beta_\ell} (k_{\ell,j} - 1) + \sum_{\ell=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{j=1}^{\gamma_\ell} (m_{\ell,j} - 2) \\ &\geq |\alpha| + Kh + (k_j - K) + (K-1)|\beta| + (K-2)|\gamma| \\ &= k_j - K + V(\alpha, h, \beta, \gamma) \\ &\geq k_j - K + K + 1 = k_j + 1 \end{aligned}$$

なので, $k_j \leq k-1$ が成り立つ.

さらに,

$$\begin{aligned} k &= |\alpha| + \sum_{j=1}^h k_j + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{\beta_\ell} (k_{\ell,j} - 1) + \sum_{\ell=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{j=1}^{\gamma_\ell} (m_{\ell,j} - 2) \\ &\geq |\alpha| + Kh + (K-1)|\beta| + (k_{\ell,j} - K) + (K-2)|\gamma| \\ &= k_{\ell,j} - K + V(\alpha, h, \beta, \gamma) \\ &\geq k_{\ell,j} - K + K + 1 = k_{\ell,j} + 1 \end{aligned}$$

なので, $k_{\ell,j} \leq k-1$ が成り立つ. 同様にすれば, $m_{\ell,j} \leq k-1$ も得られるので, (\ast) は一意に定まる漸化式であることが示せた. 従って, 形式解の斉次部分 $\{U_k(x)\}_{k \geq K}$ は,

$$U_K(x) \rightarrow U_{K+1}(x) \rightarrow U_{K+2}(x) \rightarrow \dots$$

の順に一意に定まっていくので, (4.1)の形式解 $U(x)$ は一意に存在する. このことは, (1.3)の形式解 $u(x) (= L^{-1}U(x))$ の一意存在を示している.

4.2 ジュブレイ度の評価

次の2つの補題が成り立つ.

補題 2 $s = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^n$ とする. 任意の2つの形式的冪級数 $u(x) = \sum u_\alpha x^\alpha$, $v(x) = \sum v_\alpha x^\alpha$ に対して, s にのみ依存する正定数 $C_2 > 0$ が存在して, 次の優級数関係が成り立つ.

$$B_x^s(uv)(x) \ll C_2 B_x^s(|u|)(x) B_x^s(|v|)(x). \quad (4.2)$$

補題 3 $s^0 = (s_1^0, \dots, s_n^0) = (1, \dots, n'_1, \dots, 1, \dots, n'_p)$ とし, また, $B_x^{s^0}(U)(x) = \sum \frac{U_\alpha |\alpha|!}{(s^0 \cdot \alpha)!} x^\alpha \ll W(X) = \sum W_k X^k$ ($X = |x| = x_1 + \dots + x_n$) とする. さらに, $d/dX = D_X$ とおく. このとき, s^0 にのみ依存する正定数 $C_3 > 0$ が存在して, 次の優級数関係が成り立つ.

$$B_x^{s^0}(L^{-1}U)(x) \ll C_3 W(X), \quad (4.3)$$

$$B_x^{s^0}(\partial_{[i,j]} L^{-1}U)(x) \ll C_3 D_X (XD_X)^{j-1} W(X), \quad (4.4)$$

$$(i = 1, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n'_i),$$

$$B_x^{s^0}(\partial_{[i,j]\mathbb{I}[k,\ell]}^2 L^{-1}U)(x) \ll C_3 D_X^2 (XD_X)^{j+\ell-2} W(X), \quad (4.5)$$

$$(i, k = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n'_i, \ell = 1, \dots, n'_k).$$

補題 2 は日比野氏の論文[2]や筆者の過去の論文[6]に証明が載っているので, ここでは証明は省略する. また, 補題 3 の (4.3) は補題 1 のことであり, (4.4) は[6]に証明が載っているので, これらの証明も省略する. よって, 以下では (4.5) を証明する.

((4.5) の証明) まず初めに, s^0 にのみ依存する正定数 $C' > 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} & B_x^{s^0}(\partial_{[i,j]\mathbb{I}[k,\ell]}^2 u)(x) \\ & \ll C' \partial_{[i,j]\mathbb{I}[k,\ell]}^2 (x \cdot \partial_x)^{j+\ell-2} B_x^{s^0}(|u|)(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

が成り立つことを示す. ただし, $x \cdot \partial_x = x_1 \partial_1 + \dots + x_n \partial_n$ を表す.

$[i, j] \neq [k, \ell]$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum \frac{u_\alpha \alpha_{[i,j]} \alpha_{[k,\ell]} (|\alpha| - 2)!}{(s^0 \cdot \alpha)!} x^{\alpha'} \\ &= \sum \frac{u_\alpha \alpha_{[i,j]} \alpha_{[k,\ell]} (|\alpha| - 2)!}{(s^0 \cdot \alpha - j - \ell)!} x^{\alpha'}, \\ \text{右辺} &= \sum \frac{C' |u_\alpha| \alpha_{[i,j]} \alpha_{[k,\ell]} |\alpha|^{j+\ell-2} |\alpha|!}{(s^0 \cdot \alpha)!} x^{\alpha'} \end{aligned}$$

ただし, $\alpha' = \alpha - e([i, j]) - e([k, \ell])$ を表す. 従って, (4.6) が成り立つためには

$$\frac{(s^0 \cdot \alpha)(s^0 \cdot \alpha - 1) \cdots (s^0 \cdot \alpha - j - \ell + 1)}{|\alpha|^{j+\ell-1} (|\alpha| - 1)} \leq C'$$

となる正定数 C' の存在を言えばよいが,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{(s^0 \cdot \alpha)(s^0 \cdot \alpha - 1) \cdots (s^0 \cdot \alpha - j - \ell + 1)}{|\alpha|^{j+\ell-1} (|\alpha| - 1)} \\ &\leq \frac{(s^0 \cdot \alpha)^{j+\ell}}{(|\alpha| - 1)^{j+\ell}} \leq \left(\frac{\max\{s_j^0\} |\alpha|}{(|\alpha| - 1)} \right)^{j+\ell} \leq (2 \max\{s_j^0\})^{2 \max\{s_j^0\}} \end{aligned}$$

が成り立つので, $C' = (2 \max\{s_j^0\})^{2 \max\{s_j^0\}}$ と取れば十分である. よって, (4.6) が成り立つ.

$[i, j] = [k, \ell]$ のときも同様にすれば得られる.

また, $u = L^{-1}U$ とおけば, 補題 1 より,

$$\begin{aligned} \partial_{[i,j][k,\ell]}^2 (x \cdot \partial_x)^{j+\ell-2} \mathcal{B}_x^{s^0} (|L^{-1}U|)(x) &\ll C_1 \partial_{[i,j][k,\ell]}^2 (x \cdot \partial_x)^{j+\ell-2} W(X) \\ &= C_1 D_X^2 (XD_X)^{j+\ell-2} W(X) \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる. (4.6), (4.7) を合わせることで, (4.5) が示せた. (証明終わり)

補題 1, 2, 3 から, $\mathcal{B}_x^{s^0}(U)(x) \ll W(X)$ ($s^0 = (s_1^0, \dots, s_n^0) = (1, \dots, n'_1, \dots, 1, \dots, n'_p)$) のとき, 定数 $C_4 > 0$ が存在して, $\tilde{n} = \max\{n'_j\}$ とするとき, 優級数関係

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_x^{s^0} \{f_{K+1}(x, L^{-1}U, \partial_x L^{-1}U, \partial_x^2 L^{-1}U)\} \\ &\ll |f_{K+1}|(X, C_4 W, \{C_4 D_X (XD_X)^{j-1} W\}_{j=1}^{\tilde{n}}, \{C_4 D_X^2 (XD_X)^{j-1} W\}_{j=1}^{2\tilde{n}-1}) \end{aligned}$$

が成り立つことも簡単に分かる.

方程式 (4.1) に s^0 -ボレル変換を施すと

$$\begin{cases} \mathcal{B}_x^{s^0}(U)(x) = \sum_{|\alpha|=K} \frac{a_\alpha |\alpha|!}{(s^0 \cdot \alpha)!} x^\alpha + \mathcal{B}_x^{s^0} \{f_{K+1}(x, L^{-1}U, \partial_x L^{-1}U, \partial_x^2 L^{-1}U)\}, \\ \mathcal{B}_x^{s^0}(U)(x) = O(|x|^K) \end{cases}$$

となる. ここで, 次の方程式を考える.

$$\begin{cases} W(X) = \sum_{|\alpha|=K} \frac{a_\alpha |\alpha|!}{(s^0 \cdot \alpha)!} X^K \\ \quad + |f_{K+1}|(X, C_4 W, \{C_4 D_X (XD_X)^{j-1} W\}_{j=1}^{\tilde{n}}, \{C_4 D_X^2 (XD_X)^{j-1} W\}_{j=1}^{2\tilde{n}-1}), \\ W(X) = O(X^K). \end{cases} \quad (4.8)$$

方程式の作り方から,

$$\mathcal{B}_x^{s^0}(U)(x) \ll W(X) \quad (4.9)$$

が成り立つので, 補題 1 より,

$$\mathcal{B}_x^{s^0}(u)(x) = \mathcal{B}_x^{s^0}(L^{-1}U)(x) \ll C_1 W(X) \quad (4.10)$$

も成り立つ.

(4.8) は常微分方程式であり, ニュートン図形を描くことにより, (4.8) の形式解 $W(X)$ のジュブレイ度は高々

$$\sigma + 1 = \max_{\alpha, h, \beta, \gamma} \left\{ \frac{M(\alpha, h, \beta, \gamma)}{V(\alpha, h, \beta, \gamma) - K}; f_{\alpha h \beta \gamma} \neq 0 \right\} + 1 \quad (4.11)$$

であることが[5], [6]などから分かる. すなわち, $W(X) \in \mathcal{G}_X^{\sigma+1}$ である. 従って,
 $\mathcal{B}_x^{s^0}(u)(x) \in \mathcal{G}_x^{(\sigma+1, \dots, \sigma+1)}$ なので, 注意3より,

$$u(x) \in \mathcal{G}_x^{s^0 + (\sigma, \dots, \sigma)}$$

であることが得られた. 以上で定理1が証明できた. (証明終わり)

■参考文献

- [1] R. Gérard and H. Tahara, *Singular nonlinear partial differential equations*, Vieweg, 1996.
- [2] M. Hibino, *Divergence property of formal solutions for singular first order linear partial differential equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **35** (1999), 893–919.
- [3] M. Miyake and A. Shirai, *Covergence of formal solutions of first order singular nonlinear partial differential equations in complex domain*, Ann. Polon. Math., **74** (2000), 215–228.
- [4] T. Oshima, *On the theorem of Cauchy-Kowalevski for first order linear differential equations with degenerate principal symbols*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 83–87.
- [5] A. Shirai, *Maillet type theorem for nonlinear partial differential equations and Newton polygons*, J. Math. Soc. Japan, **53** (2001), 565–587.
- [6] A. Shirai, *A Maillet type theorem for first order singular nonlinear partial differential equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **39** (2003), 275–296.
- [7] H. Yamazawa, *Newton polyhedrons and a formal Gevrey space of double indices for linear partial differential operators*, Funkcial. Ekvac., **41** (1998), 337–345.
- [8] H. Yamazawa, *Formal Gevrey class of formal power series solution for singular first order linear partial differential operators*, Tokyo J. Math., **23** (2000), 537–561.