

原著 (Article)

Totally Characteristic 型特異 1 階非線形 偏微分方程式に対するマイエ型定理の例題

Examples on the Maillet Type Theorem for Singular
First Order Nonlinear Partial Differential Equations of
Totally Characteristic Type

白井 朗^{*}
SHIRAI, Akira^{*}

キーワード : 特異 1 階偏微分方程式, Totally characteristic 型, 形式的冪級数解, 発散級数, ジュブレイ度, マイエ型定理

Key words : Singular first order partial differential equations, Totally characteristic type, Formal power series solutions, Divergent series, Gevrey order, Maillet type theorem

1. はじめに

本稿では, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{C}^d, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ とし, $u = u(t, x)$ は未知関数を表す。また, $\partial_{t_j} u(0, x) = \varphi_j(x)$ は原点近傍で正則であると仮定し, 次の 1 階非線形偏微分方程式の形式的冪級数解の発散の度合いを典型的な例題を用いて考察する。

$$f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)) = 0, \quad u(0, x) \equiv 0.$$

ただし, 関数 $f(t, x, u, \tau, \xi)$ は原点近傍で正則で, かつ, τ については整関数で, さらに次の条件を満たすものとする。以下の条件を満たすとき方程式は totally characteristic 型特異 1 階非線形偏微分方程式と呼ばれる。

$$f(0, x, 0, \{\varphi_j(x)\}, 0) \equiv 0, \quad f_{\xi_k}(0, x, 0, \{\varphi_j(x)\}, 0) \neq 0, \quad f_{\xi_k}(0, 0, 0, \{\varphi_j(0)\}, 0) = 0.$$

この方程式の形式的冪級数解 $u(t, x) = \sum_{j=1}^d \varphi_j(x) t_j + \sum_{|\alpha| \geq 2} u_\alpha(x) t^\alpha$ の発散の度合いについて例題を用いて考察し, それを一般論への足掛かりとすることが本稿の目的である。

本稿で取り上げる例題は著者の過去の論文[4]においても類似のものが扱われている。しかし本稿においては, [4]と比べ全く異なる状況の問題も考察している。また, 本稿では上記の一般的な形をした方程式に対する一般論との関連や拡張にはほとんど触れず, 例題に特化した構成となっている。特に本稿で得られた結果は[4]で得た結果よりもより厳密なものを含んでおり, [4]よりも発散の度合いの評価でより緻密な計算を行っている。紙面の都合により関連する研究や結果についての記述は割愛するが, [5]–[11]は本稿とかなり関係が深い。本稿で扱う例題の方程式を上記の一般形の方程式で考え直し, その形式的冪級数解の発散の度合いの評価に対する完全なる証明を掲載した論文を海外の専門学会誌に投稿し, 現在査読中である。本稿は, 現在投稿中の論文の理解の補助的役割を演じることを期待し

て執筆したものである。

2. 本稿で使用する記号と定義

本稿で使用する記号と関数空間を定義する。

定義 1 (ボレル変換とジュブレイ空間) 形式的冪級数 $u(t, x) = \sum u_{\alpha\beta} t^\alpha x^\beta$ に対して, その $(s, \sigma) \cdot$ ボレル変換を, $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(u) = \sum \frac{u_{\alpha\beta} |\alpha|! |\beta|!}{(s \cdot \alpha)! (\sigma \cdot \beta)!} t^\alpha x^\beta$ で定義する。ただし, $|\alpha|$ は $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ における成分の和を表し, $\beta \in \mathbb{N}^n$ に対して $|\beta|$ も同様に定める。また, $s = (s_1, \dots, s_d) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^d$ に対して, $s \cdot \alpha = s_1 \alpha_1 + \dots + s_d \alpha_d$ を表し, $\sigma \cdot \beta$ も同様である。また, ボレル変換の分母の階乗はガンマ関数を表す。即ち, $(s \cdot \alpha)! = \Gamma(s \cdot \alpha + 1)$ である。 $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ のとき, $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s, \mathbf{1}_n)}(u) = \mathfrak{B}_t^s(u)$ と書き, これを t について s -ボレル変換という。同様に, $\mathbf{1}_d = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ のとき, $\mathfrak{B}_{t,x}^{(\mathbf{1}_d, \sigma)}(u) = \mathfrak{B}_x^\sigma(u)$ と書き, これを x について σ -ボレル変換という。

$$\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(u) = \mathfrak{B}_{t,x}^{(s, \mathbf{1}_n)}(\mathfrak{B}_{t,x}^{(\mathbf{1}_d, \sigma)}(u)) = \mathfrak{B}_{t,x}^{(\mathbf{1}_d, \sigma)}(\mathfrak{B}_{t,x}^{(s, \mathbf{1}_n)}(u))$$

が成り立つことは明らかである。

もし, $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(u)$ が原点の近傍で収束するとき, $u(t, x)$ はジュブレイ空間 $\mathcal{G}_{t,x}^{(s,\sigma)}$ に属するといい, (s, σ) をジュブレイ度という。明らかに $\mathcal{G}_{t,x}^{(\mathbf{1}_d, \mathbf{1}_n)} = \mathbb{C}\{t, x\}$ (収束冪級数の集合) である。

注意として, $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(u) \in \mathcal{G}_{t,x}^{(s', \sigma')}$ ならば, $u(t, x) \in \mathcal{G}_{t,x}^{(s+s'-\mathbf{1}_d, \sigma+\sigma'-\mathbf{1}_n)}$ が成り立つ。

形式解があるジュブレイ空間に属するという結果を総じてマイエ型定理と呼ぶ。

3. 例題 1 (t について冪零型, x についてポアンカレ型)

$t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, x \in \mathbb{C}$ とし, 次の線形偏微分作用素を考える。

$$(3.1) \quad P = \delta t_2 \partial_{t_1} + x \partial_x + 1.$$

ただし, δ はその大きさが任意に小さい定数と仮定する。

c を定数とし, 次の特異 1 階偏微分方程式を考える。

$$(3.2) \quad \begin{cases} Pu(t, x) = a(x)(t_1 + t_2)^2 + cxt_1 \partial_{t_2} u + x^2 \partial_x u + u(\partial_{t_2} u)(\partial_x u), \\ u(t, x) = O(|t|^2). \end{cases}$$

ここで, $a(x)$ は原点の近傍で正則な関数を表す。このとき次の結果が成り立つ。

定理 1. 方程式(3.2)の形式的冪級数解は一意的に存在し, それは次のジュブレ空間に属する。

$$c \neq 0 \Rightarrow u \in \mathcal{G}_{t_1, t_2, x}^{(3,4,3)}, \quad c = 0 \Rightarrow u \in \mathcal{G}_{t_1, t_2, x}^{\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, 1\right)}.$$

4. 定理 1 の証明に必要となる補題

$$\mathbb{C}[t]_L x^m = \left\{ \sum_{|\alpha|=L} u_{\alpha, m} t^\alpha x^m \right\}$$

を t について L 次斉次多項式, x について m 次の集合とする。

次の補題 1, 2, 3 が成り立つ。

補題 1. (i) $P: \mathbb{C}[t]_L x^m \rightarrow \mathbb{C}[t]_L x^m$ は任意の $L \geq 2, m \geq 0$ で可逆。

(ii) $\mathbf{s} = (1, 2) \in \mathbb{N}^2$, $T = t_1 + t_2$, $X = x$ とし, $u(t, x) = \sum_{|\alpha|=L} u_{\alpha, m} t^\alpha x^m \in \mathbb{C}[t]_L x^m$ に対して, 優級数関係

$$\mathfrak{B}_t^s(u)(t, x) := \sum_{|\alpha|=L} u_{\alpha, m} \frac{|\alpha|!}{(\mathbf{s} \cdot \alpha)!} t^\alpha x^m \ll W_{L, m} T^L X^m$$

が成り立つならば,

$$(4.1) \quad \mathfrak{B}_t^s(P^{-1}u)(t, x) \ll 2(X\partial_X + 1)^{-1} W_{L, m} T^L X^m (\ll 2W_{L, m} T^L X^m).$$

が成り立つ。

補題 2. (i) $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^2$ とする。このとき, 形式級数 $u(t, x), v(t, x) \in \mathbb{C}[[t, x]]$ に対して, 正定数 $C_1 > 0$ が存在して, 次の優級数関係が成り立つ:

$$(4.2) \quad \mathfrak{B}_t^s(uv)(t, x) \ll C_1 \mathfrak{B}_t^s(|u|)(t, x) \cdot \mathfrak{B}_t^s(|v|)(t, x).$$

ここで, $u(t, x) = \sum u_{\alpha, \beta} t^\alpha x^\beta$ に対して, $|u|(t, x) = \sum |u_{\alpha, \beta}| t^\alpha x^\beta$ を表す。

(ii) $\mathbf{s} = (1, 2) \in \mathbb{N}^2$ のとき, $\mathfrak{B}_t^s(u)(t, x) \ll W(T, X) = \sum W_{L, m} T^L X^m \in \mathbb{C}[[T, X]]$ ならば, 正定数 $C_2 > 0$ が存在して, 次の優級数関係が成り立つ:

$$(4.3) \quad \mathfrak{B}_t^s(\partial_{t_1} P^{-1}u)(t, x) \ll C_2 \partial_T (X\partial_X + 1)^{-1} W(T, X) \ll C_2 \partial_T W(T, X),$$

$$(4.4) \quad \mathfrak{B}_t^s(\partial_{t_2} P^{-1}u)(t, x) \ll C_2 \partial_T (T\partial_T)(X\partial_X + 1)^{-1} W(T, X) \ll C_2 \partial_T (T\partial_T) W(T, X),$$

$$(4.5) \quad \mathfrak{B}_t^s(\partial_x P^{-1}u)(t, x) \ll C_2 \partial_X (X\partial_X + 1)^{-1} W(T, X) \ll C_2 S(W)(T, X).$$

ここで, $S(W)(T, X) = \sum W_{L, m+1} T^L X^m = \frac{W(T, X) - W(T, 0)}{X}$ を表し, シフト関数と呼ばれるものである。

補題 3. $m_1, m_2, \dots, m_k \geq L$ ($m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$) に対して、次が成り立つ。

$$(4.6) \quad m_1! m_2! \cdots m_k! \leq L!^{k-1} (m_1 + m_2 + \cdots + m_k - L(k-1))!.$$

補題 1, 2, 3 は著者の過去の論文にその証明が記載されている。よってここでは証明は省略する。例えば, [1][2][3]を参照されたい。

5. 定理 1 の証明

$Pu = U$ を新しい未知関数とすると、方程式は次のようになる。

$$U = a(x)(t_1 + t_2)^2 + cxt_1\partial_{t_2}P^{-1}U + x^2\partial_xP^{-1}U + (P^{-1}U)(\partial_{t_2}P^{-1}U)(\partial_xP^{-1}U).$$

この方程式に t について s -ボレル変換を施し、補題 1, 2 を用いると次の方程式が $\mathfrak{B}_t^s(U)$ に対する優方程式であることが分かる (補題で出てきた定数は省略して書かないこととした)。

$$V = |a|(X)T^2 + |c|X(T\partial_T)^2V + X^2S(V) + V\{\partial_T(T\partial_T)V\}S(V).$$

また, $V(T, X) \gg 0$ なので、シフト関数の定義から, $XS(V) \ll V$ が成り立つので、

$$V = |a|(X)T^2 + |c|X(T\partial_T)^2V + XV + V\{\partial_T(T\partial_T)V\}S(V)$$

もまた優方程式である。すなわち、

$$(5.1) \quad V = \frac{|a|(X)}{1-X}T^2 + \frac{|c|X}{1-X}(T\partial_T)^2V + \frac{1}{1-X}V\{\partial_T(T\partial_T)V\}S(V)$$

を考えれば, $\mathfrak{B}_t^s(U) \ll V(T, X)$ が成り立つ。

まず, $V = \sum_{L \geq 2} V_L(X)T^L$ とおき、方程式(5.1)に代入すると、係数 $\{V_L(X)\}_{L \geq 2}$ は次の漸化式を満たす：

$$L = 2 : V_2(X) = \frac{|a|(X)}{1-X} + \frac{|c|X}{1-X} \cdot 2^2 V_2(X),$$

$$L \geq 3 : V_L(X) = \frac{|c|X}{1-X} \cdot L^2 V_L(X) + \frac{1}{1-X} \sum_{L_1 + (L_2 - 1) + L_3 = L} L_2^2 V_{L_1}(X) V_{L_2}(X) S(V_{L_3}(X)).$$

次に, $V_L(X) = \sum_{m \geq 0} V_{L,m} X^m$, $A(X) := \frac{|a|(X)}{1-X} = \sum_{m \geq 0} A_m X^m$ とし、また

$$\frac{|c|X}{1-X} = \sum_{m \geq 1} |c|X^m, \quad \frac{1}{1-X} = \sum_{m \geq 0} X^m \quad \text{なので、これらを漸化式に代入すると、}$$

$$L = 2 : V_{2,m} = A_m + \sum_{m_1=0}^{m-1} 4|c|V_{2,m_1},$$

$$L \geq 3 : V_{L,m} = \sum_{m_1=0}^{m-1} |c|L^2 V_{L,m_1}$$

$$+ \sum_{L_1 + (L_2 - 1) + L_3 = L} \sum_{m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = m} L_2^2 V_{L_1,m_1} V_{L_2,m_2} V_{L_3,m_3+1}$$

を得る。ただし, m_0 は $\frac{1}{1-x}$ から出てくる x の冪を表し, $0 \leq m_0 \leq m$ を満たす。

① $c \neq 0$ のとき。 $W_{L,m} = \frac{V_{L,m}}{(L+m)!^2}$ とおくと、漸化式は次のように変わる。

$$L = 2 : W_{2,m} = \frac{A_m}{(2+m)!^2} + \sum_{m_1=0}^{m-1} \frac{4|c|(2+m_1)!^2}{(2+m)!^2} W_{2,m_1},$$

$$L \geq 3 : W_{L,m} = \sum_{m_1=0}^{m-1} \frac{|c|L^2(L+m_1)!^2}{(L+m)!^2} W_{L,m_1} \\ + \sum_{L_1+(L_2-1)+L_3=L} \sum_{m_0+m_1+m_2+m_3=m} BW_{L_1,m_1} W_{L_2,m_2} W_{L_3,m_3+1}.$$

ただし、 $B = \frac{L_2^2(L_1+m_1)!^2(L_2+m_2)!^2(L_3+m_3+1)!^2}{(L+m)!^2}$ を表す。このとき、

$$\frac{A_m}{(2+m)!^2} \leq A_m, \quad \frac{|c|L^2(L+m_1)!^2}{(L+m)!^2} \leq \frac{|c|L^2(L+m-1)!^2}{(L+m)!^2} = \frac{|c|L^2}{(L+m)^2} \leq |c|,$$

$$B \text{ の分子} = L_2^2(L_1+m_1)!^2(L_2+m_2)!^2(L_3+m_3+1)!^2 \\ \leq L_2^2\{(L_1+m_1)!(L_2+m_2)!(L_3+m_3+1)!\}^2 \\ \leq \frac{L_2^2}{(L_2+m_2+1)^2} \{(L_1+m_1+1)!(L_2+m_2+1)!(L_3+m_3+1)!\}^2 \\ \leq \{(L_1+m_1+1)!(L_2+m_2+1)!(L_3+m_3+1)!\}^2 \\ \leq 3!^4 \{(L_1+m_1+1) + (L_2+m_2+1) + (L_3+m_3+1) - 3 \times 2\}!^2 \\ = 36^2(L_1+(L_2-1)+L_3+m_1+m_2+m_3-2)!^2 \\ = 36^2(L+m-m_0-2)!^2 \leq 36^2(L+m)!^2$$

が成り立つので、 $B \leq 36^2$ が得られる。従って、

$$L = 2 : Y_{2,m} = A_m + \sum_{m_0+m_1=m, m_0 \geq 1} |c|Y_{2,m_1},$$

$$L \geq 3 : Y_{L,m} = \sum_{m_0+m_1=m, m_0 \geq 1} |c|Y_{L,m_1} \\ + \sum_{L_1+(L_2-1)+L_3=L} \sum_{m_0+m_1+m_2+m_3=m} 36Y_{L_1,m_1} 36Y_{L_2,m_2} Y_{L_3,m_3+1}.$$

を考えると、 $W_{L,m} = \frac{V_{L,m}}{(L+m)!^2} \leq Y_{L,m}$ すなわち $\mathfrak{B}_{T,X}^{(3,3)}(V) \ll Y(T,X) = \sum_{L \geq 2} \sum_{m \geq 0} Y_{L,m} T^L X^m$

が成り立つ。さらに $Y(T,X)$ は次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} Y = A(X)T^2 + |c|XY + \frac{(36Y)^2}{T}S(Y), \\ Y = O(T^2). \end{cases}$$

これは $Z = Y/T$ とおき、両辺に $\frac{1}{T(1-|c|X)}$ を掛けることにより、

$$(5.2) \quad \begin{cases} Z = A_1(X)T + \frac{T}{1-|c|X}(36Z)^2S(Z), \\ Z = O(T) \end{cases}$$

とできる。ただし, $A_1(X) = \frac{A(X)}{1-|c|X}$ を表す。

大きさが十分小さな変数 ρ を用いて $\varphi(\rho) = Z(\rho, \rho)$ とおく。このときシフト関数の定義から, $XS(Z)(T, X) \ll Z(T, X)$ が成り立つので, $T = \rho, X = \rho$ とおくと,

$$\rho S(Z)(\rho, \rho) \ll Z(\rho, \rho) = \varphi(\rho)$$

が成り立つ。従って,

$$(5.3) \quad \begin{cases} \psi(\rho) = A_1(\rho)\rho + \frac{36^2\psi(\rho)^3}{1-|c|\rho}, \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

を考えると, $\varphi(\rho) \ll \psi(\rho)$ であり, また陰関数定理から(5.3)は原点近傍で正則な解 $\psi(\rho)$ を一意に持つ。よって, $\varphi(\rho) = Z(\rho, \rho) \in \mathbb{C}\{\rho\}$ であり, これは $Z(T, X) \in \mathbb{C}\{T, X\}$ を示している。すなわち, $Y(T, X) (= TZ(T, X)) \in \mathbb{C}\{T, X\}$ である。従って, $\mathfrak{B}_{T,X}^{(3,3)}(V) \ll Y(T, X) \in \mathbb{C}\{T, X\}$ となるから, $V(T, X) \in \mathcal{G}_{T,X}^{(3,3)}$ が成り立つ。

以上のことから,

$$\mathfrak{B}_t^{\mathfrak{f}}(U)(t, x) = \mathfrak{B}_{t,x}^{(1,2,1)}(U)(t, x) \ll V(T, X) \in \mathcal{G}_{t,x}^{(3,3,3)}$$

が得られ, このことから $U(t, x)$ のジュブレイ度は

$$(1,2,1) + (3,3,3) - (1,1,1) = (3,4,3)$$

となり, $c \neq 0$ の場合の結論が得られた。

② $c = 0$ のとき。漸化式は次のようになる。

$$L = 2 : V_{2,m} = A_m$$

$$L \geq 3 : V_{L,m} = \sum_{L_1+(L_2-1)+L_3=L} \sum_{m_0+m_1+m_2+m_3=m} L_2^2 V_{L_1,m_1} V_{L_2,m_2} V_{L_3,m_3+1}$$

このとき, $W_{L,m} = \frac{V_{L,m}}{L!^{2/3}}$ とおくと, 漸化式は次のように変わる。

$$L = 2 : W_{2,m} = \frac{A_m}{2!^{2/3}}$$

$$L \geq 3 : W_{L,m} = \sum_{L_1+(L_2-1)+L_3=L} \sum_{m_0+m_1+m_2+m_3=m} B W_{L_1,m_1} W_{L_2,m_2} W_{L_3,m_3+1}$$

ただし, $B = \frac{L_2^2 L_1!^{2/3} L_2!^{2/3} (L_3+1)!^{2/3}}{L!^{2/3}}$ を表す。このとき,

$$\frac{A_m}{2!^{2/3}} \leq A_m \text{ であり, また,}$$

$$\begin{aligned} B \text{ の分子} &= L_2^2 L_1!^{2/3} L_2!^{2/3} (L_3+1)!^{2/3} \\ &= L_2^2 \{L_1! L_2! (L_3+1)!\}^{2/3} \\ &\leq \frac{L_2^2}{(L_2+1)^2} \{(L_1+3)! (L_2+3)! (L_3+3)!\}^{2/3} \\ &\leq \{(L_1+3)! (L_2+3)! (L_3+3)!\}^{2/3} \\ &\leq 5!^{4/3} \{(L_1+3) + (L_2+3) + (L_3+3) - 5 \times 2\}^{2/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 120^{4/3}(L_1 + (L_2 - 1) + L_3)!^{2/3} \\
 &= 120^{4/3}L!^{2/3}
 \end{aligned}$$

が成り立つので、 $B \leq 120^{4/3}$ が得られる。

以下、①の場合と同様にすれば、 $U(t, x)$ のジュブレイ度は

$$(1, 2, 1) + \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, 1\right)$$

であることが分かる。

(定理 1 の証明終わり)

6. 例題 2 (t, x ともに冪零型)

$t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ とし、次の線形偏微分作用素を考える。

$$(6.1) \quad P = \delta t_2 \partial_{t_1} + \nu x_2 \partial_{x_1} + 1.$$

ただし、 δ, ν はその大きさが任意に小さい定数と仮定する。

c, d を定数とし、次の特異 1 階偏微分方程式を考える。

$$(6.2) \quad \begin{cases} Pu(t, x) = a(x)(t_1 + t_2)^2 + cx_1 t_1 \partial_{t_2} u + dx_1^2 \partial_{x_2} u + t_1 u (\partial_{t_2} u) (\partial_{x_2} u), \\ u(t, x) = O(|t|^2). \end{cases}$$

ここで、 $a(x)$ は原点の近傍で正則な関数を表す。このとき次の結果が成り立つ。

定理 2. 方程式(6.2)の形式的冪級数解は一意的に存在し、それは次のジュブレイ空間に属する。

$$(c, d) \neq (0, 0) \Rightarrow u \in \mathcal{G}_{t_1, t_2, x_1, x_2}^{(3, 4, 3, 4)}, \quad (c, d) = (0, 0) \Rightarrow u \in \mathcal{G}_{t_1, t_2, x_1, x_2}^{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1, 2\right)}.$$

7. 定理 2 の証明に必要な補題

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2, \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$ に対して、

$$\mathbb{C}[t]_L[x]_M = \left\{ \sum_{|\alpha|=L, |\beta|=M} u_{\alpha, \beta} t^\alpha x^\beta \right\}$$

を t について L 次斉次多項式、かつ、 x について M 次斉次多項式の集合とする。

次の補題 4, 5 が成り立つ。

補題 4. (i) $P: \mathbb{C}[t]_L[x]_M \rightarrow \mathbb{C}[t]_L[x]_M$ は任意の $L \geq 2, M \geq 0$ で可逆。

(ii) $s = (1, 2) \in \mathbb{N}^2$, $\sigma = (1, 2) \in \mathbb{N}^2$, $T = t_1 + t_2$, $X = x_1 + x_2$ とし,

$u(t, x) = \sum_{|\alpha|=L, |\beta|=M} u_{\alpha, \beta} t^\alpha x^\beta \in \mathbb{C}[t]_L[x]_M$ に対して, 優級数関係

$$\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(u)(t, x) := \sum_{|\alpha|=L} u_{\alpha, \beta} \frac{|\alpha|! |\beta|!}{(s \cdot \alpha)! (\sigma \cdot \beta)!} t^\alpha x^\beta \ll W_{L,M} T^L X^M$$

が成り立つならば, 次の優級数関係が成り立つ:

$$(7.1) \quad \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(P^{-1}u)(t, x) \ll 2W_{L,M} T^L X^M.$$

補題 5. (i) $s = (s_1, s_2) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^2$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in (\mathbb{R}_{\geq 1})^2$ とする。このとき, 形式的冪級数 $u(t, x), v(t, x) \in \mathbb{C}[[t, x]]$ に対して, 正定数 $C_1 > 0$ が存在して, 次の優級数関係が成り立つ:

$$(7.2) \quad \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(uv)(t, x) \ll C_1 \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(|u|)(t, x) \cdot \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(|v|)(t, x).$$

ここで, $u(t, x) = \sum u_{\alpha, \beta} t^\alpha x^\beta$ に対して, $|u|(t, x) = \sum |u_{\alpha, \beta}| t^\alpha x^\beta$ を表す。

(ii) $s = (1, 2) \in \mathbb{N}^2$, $\sigma = (1, 2) \in \mathbb{N}^2$ のとき, $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(u)(t, x) \ll W(T, X) \in \mathbb{C}[[T, X]]$ ならば, 正定数 $C_2 > 0$ が存在して, 次の優級数関係が成り立つ:

$$(7.3) \quad \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(\partial_{t_1} P^{-1}u)(t, x) \ll C_2 \partial_T W(T, X),$$

$$(7.4) \quad \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(\partial_{t_2} P^{-1}u)(t, x) \ll C_2 \partial_T (T \partial_T) W(T, X),$$

$$(7.5) \quad \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(\partial_{x_1} P^{-1}u)(t, x) \ll C_2 \partial_X W(T, X),$$

$$(7.6) \quad \mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(\partial_{x_2} P^{-1}u)(t, x) \ll C_2 \partial_X (X \partial_X) W(T, X).$$

これらの補題の証明も補題 1, 2 と同様にすればできるのでここでは省略する。

8. 定理 2 の証明

$Pu = U$ を新しい未知関数とする。このとき方程式 (6.2) は次のようになる。

$$U = a(x)(t_1 + t_2)^2 + cx_1 t_1 \partial_{t_2} P^{-1}U + dx_1^2 \partial_{x_2} P^{-1}U + t_1 P^{-1}U (\partial_{t_2} P^{-1}U) (\partial_{x_2} P^{-1}U).$$

この方程式に $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}$ を施し, 補題 4, 5 を用いると, 次の方程式が $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(U)$ に対する優方程式であることが分かる。(補題で出てきた定数は省略した。)

$$(8.1) \quad V = |a|(X)T^2 + |c|X(T\partial_T)^2V + |d|X(X\partial_X)^2V + V\{(T\partial_T)^2V\}\{\partial_X(X\partial_X)V\},$$

すなわち, $\mathfrak{B}_{t,x}^{(s,\sigma)}(U) \ll V(T, X)$ が成り立つ。

まず, $V = \sum_{L \geq 2} V_L(X)T^L$ とおき, (8.1) に代入すると, 係数 $\{V_L(X)\}_{L \geq 2}$ に対して次の漸化式を得る。

$$L = 2 : V_2(X) = |a|(X) + 2^2|c|XV_2(X) + |d|X(X\partial_X)^2V_2(X),$$

$$L \geq 3 : V_L(X) = |c|XL^2V_L(X) + |d|X(X\partial_X)^2V_L(X)$$

$$+ \sum_{L_1+L_2+L_3=L} L_2^2 V_{L_1}(X) V_{L_2}(X) \{\partial_X(X\partial_X)V_{L_3}(X)\}.$$

次に, $V_L(X) = \sum_{M \geq 0} V_{L,M} X^M$, $A(X) := |a|(X) = \sum_{M \geq 0} A_M X^M$ として, これらを漸化式に代入すると,

$$L = 2 : V_{2,M} = A_M + 4|c|V_{2,M-1} + |d|(M-1)^2 V_{2,M-1},$$

$$L \geq 3 : V_{L,M} = |c|L^2 V_{L,M-1} + |d|(M-1)^2 V_{L,M-1} \\ + \sum_{L_1+L_2+L_3=L} \sum_{M_1+M_2+(M_3-1)=M} L_2^2 M_3^2 V_{L_1,M_1} V_{L_2,M_2} V_{L_3,M_3}.$$

① $(c, d) \neq (0, 0)$ のとき. $W_{L,M} = \frac{V_{L,M}}{(L+M)!^2}$ とおき, $W_{L,M}$ の満たす漸化式を求め, 係数に

現れる階乗を評価していく. すなわち, 定理 1 の証明を真似れば $U(t, x) \in \mathcal{G}_{t_1, t_2, x_1, x_2}^{(3,4,3,4)}$ が得られる. このことの概要だけを述べる. $\{W_{L,M}\}_{L \geq 2, M \geq 0}$ は次の漸化式を満たす.

$$L = 2 : W_{2,M} = \frac{A_M}{(2+M)!^2} + \frac{4|c|(2+M-1)!^2}{(2+M)!^2} W_{2,M-1} + \frac{|d|(M-1)^2 (2+M-1)!^2}{(2+M)!^2} W_{2,M-1},$$

$$L \geq 3 : W_{L,M} = \frac{|c|L^2 (L+M-1)!^2}{(L+M)!^2} W_{L,M-1} + \frac{|d|(M-1)^2 (L+M-1)!^2}{(L+M)!^2} W_{L,M-1} \\ + \sum_{L_1+L_2+L_3=L} \sum_{M_1+M_2+(M_3-1)=M} B W_{L_1,M_1} W_{L_2,M_2} W_{L_3,M_3}.$$

ただし, $B = \frac{L_2^2 M_3^2 (L_1+M_1)!^2 (L_2+M_2)!^2 (L_3+M_3)!^2}{(L+M)!^2}$ を表す. このとき,

$$\frac{A_M}{(2+M)!^2} \leq A_M, \quad \frac{|c|L^2 (L+M-1)!^2}{(L+M)!^2} \leq |c|, \quad \frac{|d|(M-1)^2 (L+M-1)!^2}{(L+M)!^2} \leq |d|, \quad B \leq 36^2$$

が成り立つので,

$$L = 2 : Y_{2,M} = A_M + |c|Y_{2,M-1} + |d|Y_{2,M-1},$$

$$L \geq 3 : Y_{L,M} = |c|Y_{L,M-1} + |d|Y_{L,M-1} \\ + \sum_{L_1+L_2+L_3=L} \sum_{M_1+M_2+(M_3-1)=M} 36Y_{L_1,M_1} 36Y_{L_2,M_2} Y_{L_3,M_3}.$$

を考えると, $W_{L,M} = \frac{V_{L,M}}{(L+M)!^2} \leq Y_{L,M}$ すなわち $\mathfrak{B}_{T,X}^{(3,3)}(V) \ll Y(T, X) = \sum_{L \geq 2} \sum_{M \geq 0} Y_{L,M} T^L X^M$

が成り立つ. さらに $Y(T, X)$ は次の方程式を満たす.

$$\begin{cases} Y = A(X)T^2 + (|c| + |d|)XY + (36Y)^2 S(Y), \\ Y = O(T^2). \end{cases}$$

両辺に $\frac{1}{1-(|c|+|d|)X}$ を掛けることにより,

$$(8.2) \quad \begin{cases} Y = A_1(X)T^2 + \frac{1}{1-(|c|+|d|)X} (36Y)^2 S(Y), \\ Y = O(T^2) \end{cases}$$

を考えればよい. ただし, $A_1(X) = \frac{A(X)}{1-(|c|+|d|)X}$ を表す. これは定理 1 で扱った方程式と

類似の形であるので, あとは定理 1 のときと同様にすれば, ジュブレイ度が $(3,4,3,4)$ であることが従う.

② $(c, d) = (0, 0)$ のとき。方程式(8.1)は次のようになる。

$$(8.3) \quad V = |a|(X)T^2 + V\{(T\partial_T)^2 V\}\{\partial_X(X\partial_X)V\}, \quad V = O(T^2).$$

これは[1]で扱った方程式の形であり、ニュートン図形を描くことにより、その形式解 V

はジュブレイ空間 $\mathcal{G}_{t,x}^{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1)}$ に属することが[1]の主定理より分かる。従って形式解

$U(t, x)$ のジュブレイ度は、

$$(1, 2, 1, 2) + \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1\right) - (1, 1, 1, 1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1, 2\right)$$

となり、定理 2 の結論を得る。

(定理 2 の証明終わり)

参考文献

- [1] A. Shirai, *Maillet type theorem for nonlinear partial differential equations and Newton Polygons*, J. Math. Soc. Japan, **53** (2001), 565–587.
- [2] A. Shirai, *Convergence of formal solutions of singular first order nonlinear partial differential equations of totally characteristic type*, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 187–208.
- [3] A. Shirai, *A Maillet type theorem for first order singular nonlinear partial differential equations*, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **39** (2003), 275–296.
- [4] A. Shirai, *Gevrey order of formal solutions of singular first order nonlinear partial differential equations of totally characteristic type*, Journal of the school of education, Sugiyama Jogakuen Univ., **6** (2013), 159–172.
- [5] H. Chen and Z. Luo, *On the holomorphic solution of non-linear totally characteristic equations with several space variables*, Preprint 99/23 November 1999, Institute fur Mathematik, Universitat Potsdam.
- [6] H. Chen, Z. Luo and H. Tahara, *Formal solutions of nonlinear first order totally characteristic type PDE with irregular singularity*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **51** (2001), No. 6, 1599–1620.
- [7] H. Chen and H. Tahara, *On totally characteristic type non-linear partial differential equations in complex domain*, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **35** (1999), 621–636.
- [8] M. Hibino, *Divergence property of formal solutions for singular first order linear partial differential equations*, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **35** (1999), 893–919.
- [9] M. Miyake and A. Shirai, *Convergence of formal solutions of first order singular partial differential equations in complex domain*, Ann. Polon. Math., **74** (2000), 215–228.
- [10] T. Oshima, *On the theorem of Cauchy-Kowalevski for first order linear differential equations with degenerate principal symbols*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 83–87.
- [11] H. Yamazawa, *Formal Gevrey class of formal power series solution for singular first order linear partial differential operators*, Tokyo J. Math., **23** (2000), 537–561.