

# 数学教員の持つべき数学リテラシー についての覚え書き<sup>1)</sup>

浪川 幸彦

Yukihiko Namikawa

## 1. リテラシー概念に基づく教育カリキュラムの設計

教育カリキュラムの設計において、学習者がその受ける教育の最終段階、すなわち社会人としての成人、職業人としての自立（一人前）などの姿を想定し、その過程（process）として各々の校種別教育課程を考える、という当然のように思われる手法が教育の場で真面目に考えられるようになったのは、世界的に見てもきわめて新しい。

日本の場合、幼稚園から高等学校までの学習指導要領を国が定めているため、一見これが考えられているようであるが、実はそのような「理想形態」があたかも自明のものとして存在するかのようにされているだけで、その「理想」が具体的に明示されたことはない。そのコンセンサスを欠くところから、不毛な議論が生まれたりもする。

そもそもこのような形で個人の中での知識体系あるいは能力の「理想形態」を想定し、そこに至る道程を考えようとするのは、系統主義の立場に近く、また自然科学のように学問としての知識自体がすでに体系的にできていることが望ましいので、広い狭いは別にして「教科」の存在を考えざるを得ない。したがってこうしたカリキュラム設計を考えるのは、数学・理科等の自然科学系科目において有効であると期待される<sup>2)</sup>。歴史的に見ても実際この方向が現れ、具体化されつつあるのは科学教育に重点を置いた教育改革の動きの中においてである。この「理想形態」は現在広く「リテラシー」の名で呼ばれるのが普通であるが、教育の場、特にカリキュラム設計に関わる形で取り上げられたのは、米国科学振興協会（American Association for the Advancement of Science、略称 AAAS）による科学教育改革計画“Project 2061”の中でその最初の活動として行われた「科学リテラシー」像策定 [SfAA]（1989）が初めであろう。

我が国においてもこの [SfAA] を改訂し、かつ我が国に相応しい形を見出すべく「『科学技術の智』プロジェクト」<sup>3)</sup> が実施され、2008年3月に報告書 [SfAJ] が出された。

この「リテラシー」像はあくまで終着点であるから、これをカリキュラムとして学習プログラムの形で位置付けるのは、もう一つ別の作業である。実際 AAAS は上記

報告書に続いてこのリテラシー像に至る「里程標」を出版している（Benchmarks for Science Literacy, 1993）。わが国のプロジェクトはまだこの段階には至っていない<sup>4)</sup>。

しかし教育改革が成功するためには、カリキュラム改革と共にその実行を担う教員の能力向上が不可欠である。そのためには教員養成（pre-service education）・教員研修（in-service education）の改革が同時に必要になってくる。これを考える上で、例えば数学であれば、「数学教員の持つべき数学リテラシー像」を明確にして、そこに至るための教育カリキュラムを設計することが有効であると期待される。

本論文は、それを行うための言わば「仕様書」として、その「リテラシー像」に必要な条件や、その具体化のアイデアを幾つか述べ、これから進めようとする研究における議論の「叩き台」たろうとするものである。したがって内容は体系的でもなく、網羅的でもない。「覚え書き」と称するゆえんである。

## 2. すべての人が持つべき数学リテラシー像

数学教員の持つべき数学リテラシー像は、当然のことながら（教えられる者たちである）「すべての人が持つべき数学リテラシー」像（mathematical literacy for all）を前提とした、後者が有効に教育されるためのもう一段高い、あるいは特殊化された数学リテラシーである。そこでまず『科学技術の智』プロジェクト報告書の数理科学専門部会報告書 [SfAJM] にまとめられた数学リテラシー<sup>5)</sup> 像を基にその考え方、概要を述べておきたい。これについての詳細あるいは議論は報告書または筆者による報告 [Namikawal] を参照されたい。

上記プロジェクトで『科学技術の智』と呼んでいるものが、ここで言う「科学リテラシー」に他ならないのであるが、報告書ではその具体像を描くことに集中しているので、その「定義」としては「日本人が心豊かに生きるためにすべての大人が2030年の時点で身に付けておいてほしい科学技術の素養」「科学・数学・技術に関係した知識・技能・物の見方」としか述べられていない。

そこで今回の報告をまとめるに当たって先行研究として参考にした二つを参照しておこう<sup>6)</sup>。

まず AAAS の [SfAA] では「科学リテラシー」を次のように定義している：  
「科学リテラシーは、自然科学および社会科学、さらに数学および科学技術に関わるものであるが、種々の側面を持っている。自然界に親しみ、その統一性を尊重すること；数学、技術および科学相互の重要な関連の仕方を認識すること；科学の基本概念と基本原理を理解すること；科学的な思考方法を取ることができること；科学、数学、技術が人間の営みであること、その有効さと限界とを知っていること；科学的知識および思考方法を個人的あるいは社会的目的のために用いることができること、等が挙げられる。」（「序文」より、私訳）

また OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）の「評価の枠組み」[PISA2003] では、

数学リテラシーを次のように定義している：

「建設的で社会的関心豊かな思慮深い市民として、数学が世界の中で果たしている役割を認識・理解し、数学を用いた確実な根拠に基づいて判断し、個人の生活における必要に応じて数学を用いあるいは関わっていく能力」（「領域の定義」より、訳文に変更を加えた）

これらの定義から分かることは、まず第一に、リテラシーとは単に科学あるいは数学についての学問的知識ではなく、それが個人、社会、他の学問・文化、あるいは人間の思考そのものなどといかに関わっているかという、言わば「開かれた」知識であり、能力としては科学あるいは数学の問題が解けるだけでなく上記諸分野に関わった数学的問題の解決能力までも含むものだとということである。

個人あるいは社会との関係で言えば、「市民」という立場で「数学的根拠に基づく判断ができる」という部分が重要である。単に日常生活で身の回りの計算ができるということだけではない。例えば統計に関わる知識感覚は様々の場でかなり必要である。

他の学問との関係では、当然のことながら自然科学、特に物理学との関わりは密接で、学問自体が相互に影響を与え合いながら発展してきた。そこでは数学が自然現象を記述する基礎言語となるところに根本的な重要性がある。この言語としての数学の重要性は20世紀になってますます高まっている。ここで重要なことは、数学はただの「言葉」ではなく、理論の汎用的なモデルを与えることで、他の学問に寄与している点である。それは力学と微分方程式論との関係に典型的に表れている。

個人の内部、人間の思考との関わりでは、数学が個人の思考あるいは他者とのコミュニケーションの手段として自然言語と並ぶ重要性を持っていることが挙げられる。ここで重要なのは、自然言語と比較した場合、数学言語は情緒的部分を排し「論理」に強く傾いている点である。

第二に、リテラシーとは、その分野についての知識・スキルだけではなく、その学問あるいは問題解決の「考え方」「方法」の認識を含む点である。ここでも数学が一つの「言語」であるとの認識は大切である。数学の方法論で抽象あるいは論理は最も大事なものに属するが、これらはいずれも本来言語が持っている特徴である。理学部の学生によく知られた言葉に「生物は化学、化学は物理、物理は数学、数学は哲学」というものがあるが、この表現はある意味で正鵠を射ている。

要約して言えば、数学リテラシーとは（学問としての）数学の知識を核にしつつ、それを基に数学に関わる様々のことがらに開かれた知識、ふくらみを持った知識であり、またその知識自体の有り様を客観的に認識できていることである。そして「すべての人の持つべき」数学リテラシーがどのようなものであるべきかは、個々の話題毎に具体的な判断をしていくことになる。

したがって「数学教員の持つべき」数学リテラシーを考える場合にも上記の枠組みは変わらない。数学教員という立場から考えて、どのような部分が「すべての人の持つべき」ものと異なってくるかを見ていくことになる。

もう一つの比較対象は、専門的数学知識を用いる（数学者を含む）研究者・技術者における数学リテラシーである<sup>7)</sup>。

### 3. 理想の数学教員とは？

さて「数学教員の持つべき」数学リテラシーを考えるためには、まずあるべき「数学教員」の姿を明らかにしなければならない。これはまともに考え出すと別の深い問題であるが、ここでは Mogens Niss 氏による論考 [Niss] を基に考えることとしよう。

その前に確認しておくが、ここで「数学教員」とは数学を専任教科として担当する教員、すなわち中学高等学校の数学教員を意味するものとする。算数を教える小学校教員、あるいは大学等高等教育における（必ずしも数学科学生を対象としない）数学教育に関わる教員についても考える必要があり、またかなりの部分において重なるが、議論を明確にするためここではふれない。

さて Niss 氏は数学教員に要求される基本的な資質として3つの「公理」を掲げる：  
公理1：教師は生徒たちが、彼等の私生活、職業生活、社会生活において役立つ数学的な荷を負わせる（知識を身に付けさせる）任務を果たさねばならない。言い換えれば、教師はただの被雇用者ではなく、誠実な指導者（メンター）として役立たねばならない。

公理2：教師は、彼等自身、生徒に期待されているあらゆる学習活動を行えなければならない。言い換えれば教師は、生徒に身に付けさせようとしている（数学的）能力を最低限持っていないなければならない。

公理3：通常、教師は数十年にわたって勤める。彼等は数学教育の発展に積極的に寄与すべくそれに（幾つかの意味において）備えていなければならない。たとえその発展が数学教師の姿や役割を決定づける要素や要因に根本的な変化をもたらすとしても。言い換えれば、変化への障害あるいはその犠牲者ではなく発展の先兵あるいは用兵となるために、教師は直接的な日常の必要をかなり超える柔軟な（数学的）能力を持たなければならない。（公理終わり）

同氏はこれを基本として、そこからさらに具体的に必要とされる資質を描き出しているのであるが、その第一に、教師に必要な知識として、まさに上に挙げたような開かれた知識としての数学リテラシーに対応することがらを挙げている<sup>8)</sup>。

ここでは同じくこの公理に照らして、どのような数学リテラシーが数学教員に必要なかを考えていくことにしよう。

ちなみに Niss 氏はその論文で描かれている数学教師像がユートピア世界のものだと認めている。しかしある理想像を描き、そこにいかにアプローチするかという観点でものを考えるのはいかにも数学者らしい発想である。筆者もそのひそみに倣って、理想としての数学教員が持つリテラシーを考えることとしたい。それをどれだけどのように実現するか、特に教育カリキュラムとして具体化するかは次のステップの課題

なのである。

#### 4. コアとしての数学的知識

数学教員は数学を教えるのであるから、まずコアとしての数学的知識をしっかり持たなければならない。これは上の公理2および公理3に該当する。

そこで言われているのは、教える数学的内容そのものについて通暁していることはもちろん、それを超える知識を持たねばならない、あるいはそれが必要となったときに学ぶ能力を持っているということである。

数学教員は数学研究者あるいは高度の数学を職業上必要とする者ではないので、専門的知識として数学のある部分の特に深い知識が必要というわけではない。言わばジェネラリストとして数学に関する一般的な知識、ただし普通の人よりはかなり深い知識を持っている必要がある。

それがなぜ必要かと言えば、教師は数学の水先案内人として、当該の数学的内容がこれからどう学習の中で発展して、将来につながっていくかを、数学という世界全体の中に位置付けた形で理解していなければならないからである。喩えて言えば、日本について学ぶ場合に日本だけ見てはダメで、アジアの中であるいはさらに広く世界の中での姿を知らなければならないのと同じである。

この趣旨で1世紀以上前に書かれた書物がFelix Kleinの「高い立場から見た初等数学」(Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus) (1902ff)である。本書の中で彼は当時の新しい数学の流れから学校教育で教えられる題材の取り扱いについて新しい観点を示し、カリキュラム改革の提案も行っている<sup>9)</sup>。しかしその主目的はこれからギムナジウム(ドイツの中等学校)教師になろうとする学生に対して、こうした新しいより進んだ立場からの学校数学の捉え方を示すことである。

この点では、結論的に言えば、従来から理学部数学科で教えられているカリキュラムのコア部分(必修部分)は概ね妥当な範囲であろう。

しかしそれは高過ぎる、特に中学教員であればそこまでは要らないという議論があり得る。これについては個々具体的に十分検討の余地があり、ここでは第1次近似として、候補に挙げておくにとどめたい。

ただそれを考えるための一般的な原理として、実はコアとしての数学的知識が公理1にも関わることをはっきりさせておきたい。

すなわち、数学学習過程で生徒の乗り越えるのが難しい箇所が幾つかあるが、その多くの場合は数学の理論から考えてもその捉え方に飛躍が必要な箇所である。例えば分数あるいは負数の乗除は除法が乗法の逆演算であることを(間接的であれ)十分意識化しないと納得することが難しい。またベクトルの成分による計算は幾何ベクトルと数ベクトルとが位置ベクトルを介して結び付けられているのであって、代数と幾何との重要な接点なのであるが、それだけに形式的な理解を超えることはなかなか難し

い。

一方数学教員向けにより重要と思われる題材として、1) 数体系の構築と2) 初等幾何学がある。1) は教員養成系大学学部では伝統的にかなり扱われてきたが最近では専門科目の時間削減の結果必ずしも十分でないように聞く。2) についてはさらにお寒い状況である。少なくとも中学校で扱っている内容について、ある程度の公理的な取扱で体系的に学ぶことが望ましい。しかしかつては隆盛を誇った初等幾何学に関する書物が今ほとんど消えてしまっていて<sup>10)</sup>、この知識を持つ教員も今や定年を迎えようとする状況であるから、状況の改善には余程の意図的努力が必要である。またこの初等幾何学をもう一つ高い立場から見るとして座標幾何学があるわけであるが、これも大学カリキュラムでは線型代数学に埋もれてほとんど扱われていない。本来は線型変換群の取り方で様々の幾何学が出てくる Erlangen プログラムの考え方を最終到達点とする講義があつてよいと思われる ([Inoguchi] 参照)。さらに非ユークリッド幾何学についてもある程度の知識を持っていることが望ましい (上の注 10) 参照)。

## 5. 流れとしての現代数学入門

不易流行の不易がコア的な部分とすれば、流行に当たる数学知識として現代数学の流れを概括的に理解しておくことは重要である。これは先の公理 3 に直接つながるが、コア的な数学知識のより深い理解とその意味の把握という意味からは公理 2 とも関連する。

この立場からの最初の優れた著作を著したのが再び F. Klein で、彼の「19 世紀における数学の発展についての講義」(Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 1926, 邦訳「クライン：19 世紀の数学」共立出版) がこれにあたる。日本では高木貞治の「近世数学史談」が本書を用いて書かれたので、数学史の書物のように誤解されているが、これは当時の「現代」数学入門である。それは楕円関数の取り扱いなどを見れば一目瞭然であり、また序文にはこれがギムナジウム教師あるいはそれを目指す学生に対するものとしてその趣旨がはっきり書かれている。

それから既に 1 世紀近くを経て、数学自身が当時とは全く装いを変えている今日、本書の現代版が必要である。実際その様々の試みがより広く数学科学生あるいは一般向けに行われているが、それを教員養成カリキュラムの中できちんと位置付けることはなお行われていないように思う。

そこでは時系列的な流れと共に、数学という学問の体系的な認識、科学哲学的な立場からの認識が必要である。その一つの重要な文献は N. Bourbaki, “L’architecture des Mathématiques” (邦訳「数学の建築術」, 「数学思想の流れ」(東京図書) に収録) である。特に「数学は一つである」という観点から、代数・幾何・解析を統一したパー

スペクティブの下に見ることがカリキュラムを考える上で重要になる。

## 6. 他の学問、特に自然科学との関連

歴史的に見ても最初に挙げられるのは物理学、特に力学との関連である。微分積分学の誕生がニュートン力学のそれと相互に深く関係し合っていることは当然知っているべき常識である。しかしながら教員養成系の学生は、必ずしも力学を履修していない。高等学校の物理学は奇妙な仕方では微分積分との直接的結びつきを避けている。したがって少なくとも初年次解析学のカリキュラムあるいはその発展(常微分方程式論)の中で、この関連についてある程度時間を取って触れることが望ましい。

コンピュータの発達に伴う情報科学の基礎にはもちろん数学があるが、そこでは形式論理学に始まるアルゴリズム理論や組合せ論・グラフ理論などを含むいわゆる離散数学が重要になってくる。従来物理学等との関連から連続の対象を扱う解析学が主であった状況から変化が起きつつある。元来離散と連続の両者は平行して理論が作られてきたのであり、これを学ぶことで、学習過程の中にある離散数学的題材(小数計算、数列、順列組み合わせなど)とその対応する連続的題材を意識化することは教員にとっても教材の体系的な理解に重要な役割を果たす。

また統計学の考え方が近年ますます重要になってきているが、これをその重要性和共に理解するためには経済学あるいは医学などで実際にある具体例を用いて学ぶことが有効であろう。そのためにそうした具体例を参照できるデータベースの類があって欲しい。実際そのような試みがすでに国際的に始まっていると聞いている(CensusAtSchool—an International Teaching and Learning Resource)。なおこれは数学と社会との関連を知る上でも重要である。

## 7. 言語としての数学

この重要性は数学リテラシーの概説で強調したところであるが、これ自体をまとめて何らかの形で教えるべきかどうかについてはなお考えが定まっていない。どちらかと言えば、個々の数学カリキュラムの中で、この視点をしっかりと踏まえて教えていくことが本来のあり方であろう。

論理、特に述語論理は従来解析学( $\epsilon$ - $\delta$ 論法)あるいは線型代数学(線型独立等)で学ぶのであるが、学部学生が最も困難を感じる部分であり、数学教員にもこの辺りまではしっかりした知識理解を持っていて欲しいと思う。その困難はおそらく初等幾何学における証明の理解が不十分だからであり、初等幾何学あるいは初等整数論の中で、演繹的推論についてしっかりと学んでおくことが必要であろう。特に後者をうまく教員養成系カリキュラムの中に位置付けられると、それ自身豊かな内容を持っている分野なので望ましいと考える。

一方で記号の使用や図形の使用（地図、グラフ等）について言語理論の立場から考えることは重要で、それは一つの分野になりうると信じるのだが、まだ形すらできていないので、将来の課題としたい。その萌芽的なものは [SfAJM] に書かれている。

#### ■注

- 1) 本研究は科学研究費基盤研究(B)「数学リテラシーを育成する数学教員養成カリキュラムの研究」(課題番号 20300255)の援助を受けている。
- 2) しかし他の「文系」科目でもこうしたカリキュラム設計は可能であり、また必要なことであると思う。それについては稿を改めて論じたい。
- 3) 正式には 2006-07 年度科学技術振興調整費調査研究「日本人が身に付けるべき科学技術の基礎的素養に関する調査研究」(代表者：北原和夫 (国際基督教大学))。
- 4) 筆者による予備的な考察として [Namikawa 2] がある。
- 5) 「数学リテラシー」(mathematics literacy)と「数学的リテラシー」(mathematical literacy)とは同じ意味のものとして区別しない。「科学リテラシー」と「科学的リテラシー」についても同様である。
- 6) 数学リテラシーについて一般的に述べたものとして [Ja] を挙げておく。
- 7) これらの人々も専門的数学知識とともに知っているべき素養が考えられる。これは理系基礎教育のカリキュラムを考える上で重要になる。
- 8) 実は同氏は PISA の数学的リテラシー国際専門委員会委員の一人として PISA の数学リテラシー策定に携わっており、こうした視点が入ってくるのは当然と言えよう。
- 9) それらの提案の内、例えば関数のグラフを導入し、当初から関数の直観的理解を図ることはすでに常識となったが、積分をグラフの面積として導入し、三角関数と指数関数を 2 次曲線の積分の逆関数として統一的に導入することなどは学部数学専門教育でさえまだ一般的ではない。本書についてより詳しい紹介は [Namikawa 3] を参照。
- 10) 今なお入手可能な書物として [Kobayashi] を挙げておく。

#### ■参考文献

- [Inoguchi] 井ノ口順一 (2007) 「幾何学いろいろ」、日本評論社。
- [Ja] Jablonka, E. (2003) "Mathematical Literacy", Bishop, A. J. et al. Eds., Second International Handbook of Mathematics Education, Dordrecht, Kluwer, pp. 75-102.
- [Kobayashi] 小林昭七 (1990) 「ユークリッド幾何から現代幾何へ」、日本評論社。
- [Namikawa 1] 浪川幸彦 (2008) 「日本における数学リテラシー像策定の試み—『科学技術の智』プロジェクト数理科学部会報告—、第 41 回数学教育論文発表会論文集、日本数学教育学会 pp. 39-44.
- [Namikawa 2] 浪川幸彦 (2007) 「数学という学問から問う数学教育のあり方—子供の発達を見据えた新しい系統性に基づくカリキュラムの提言—」、「世界をひらく数学的リテラシー」、明石書店、pp. 188-205.
- [Namikawa 3] 浪川幸彦 (2004) 「クライン：『高い立場から見た初等数学』」、「数学のたのしみ」新シリーズ 04 秋号「名著発掘」、pp. 171-178.
- [Niss] Niss, M. (1995) "Challenges to the preparation of teachers of mathematics", Proc. ICM-III—China Regional Conference on Mathematical Education, pp. 1-9.
- [PISA2003] (2004) 「PISA 2003 年調査 評価の枠組み」、ぎょうせい。[この年の調査では数学リテラシー調査が主であったため、これについて詳説されている。2006 年調査は基本的にこの枠組みを受け継いでいる]

[SfAA] (1989) Science for All Americans, American Association for the Advancement of Science, <http://www.project2061.org/publications/sfaa/default.htm> から英文、日本語訳がダウンロード可能.

[SfAJ] (2008) 「21 世紀の科学技術リテラシー像—豊かに生きる智—プロジェクト」総合報告書、<http://www.science-for-all.jp/> からダウンロード可能.

[SfAJM] (2008) 「21 世紀の科学技術リテラシー像—豊かに生きる智—プロジェクト」数理科学専門部会報告書、<http://www.science-for-all.jp/> からダウンロード可能.