相山女学園大学教育学部紀要（*Journal of the School of Education, Sugiyama Jogakuen University*）**6**：21–27（2013）

論文（*Article*）

班分け問題

Grouping Problem

竹内　聖彦
Kiyohiko Takeuchi*

摘　　要

n^2 人の生徒を n 人ずつに班分けすることを考える。一旦班分けした後に班を解消し，再度班分けすることを繰り返す。このとき，新しい班分けでできる班のどの二人もそれ以前の班分けでは異なる班に属しているようにする。このような班分けは何回繰り返すことができるか。この問の解が $n+1$ であることを幾つかの場合に示すとともに，この問題の教材としての取扱いを考察する。

キーワード：初等整数論，組合せ論，学校数学

Key　words：elementary number theory, combinatorics, school mathematics

1．序

問：n^2 人の生徒を n 人ずつに班分けすることを考える。一旦班分けした後に班を解消し，再度班分けすることを繰り返す。このとき，新しい班分けでできる班のどの二人もそれ以前の班分けでは異なる班に属しているようにする。このような班分けは何回繰り返すことができるか。

本稿では，いくつかの場合についてこの問の解を与えるとともに，この問題の学校教育における扱いの可能性について考察する。

上の問題は次のように符号理論の用語を用いて表現できる（[1]）。

X を階数 n^2 の $\mathbb{F}_2$ − 加群とする：

$$X=(\mathbb{F}_2)^{\oplus n^2}=\{x=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n^2-1})\mid x_i\in\mathbb{F}_2\}$$

ここで $\mathbb{F}_2=\{0,\ 1\}$ は標数 2 の素体とする。X 上の Hamming 距離 $d(x,\ y)$ を

$$d(x,\ y)=\#\{\,i\mid x_i\neq y_i \text{ in } \mathbb{F}_2\,\}$$

で定める。ただし，$\#A$ は集合 A の要素の個数を表す。x の Hamming 重み $|x|$ を

$$|x|=d(x,\ o)$$

で定める。ここで $o=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\in X$ である。C を次の条件(1)，(2)をみたす X の最

*相山女学園大学教育学部

大部分集合とする：

(1) 任意の符号 $x \in C$ に対して，$|x| = n$ である。

(2) 任意の符号 $x, y \in C$ に対して，距離 $d(x, y)$ は $0, 2n-1, 2n$ のいずれかである。

先の問題は $\#C$ の最大値を評価することと同値である。本稿では2つの場合に $\#C$ の最大値を与える。

主結果：$n = p$ または $n = p^2$ ならば $\#C$ の最大値は $n(n+1)$ である。ここで p は素数とする。換言すれば，素数 p に対して，$n = p$ または $n = p^2$ のとき，n^2 人の生徒を n 人ずつの班にどの二人も同じ班に一度しか入らないように班分けすることは $n+1$ 回繰り返すことができる。

本稿では以下の記号と定義を用いる。

正整数 $n \in \mathbb{Z}$ を固定する。Z_n を n より小さい非負整数の集合とする：

$$Z_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して，記号 $[a]_n \in Z_n$ は a の n による剰余を表す。符号 $x \in C$ の有効添え字 I_x を

$$I_x = \{ i \mid x_i \neq 0 \} = \{ i \mid x_i = 1 \} \subset Z_{n^2}$$

で定める。条件(1)及び(2)は有効添え字 I_x によって表現すると次のとおりである：

(1) 任意の符号 $x \in C$ に対して，$\# I_x = n$ である。

(2) 任意の符号の対 $x, y \in C$ に対して，$\#(I_x \cap I_y)$ は $n, 1, 0$ のいずれかに等しい。

次節では $\#C$ の簡単な評価式を与え，続く第3節，第4節ではそれぞれ n が素数 p の場合とその平方 p^2 の場合の結果を示す。最後の第5節では，この問題の学校教育における扱いの可能性について触れる。

2．簡易評価式

まず，$\#C$ の最大値の上限を評価する。

それぞれの $k \in Z_{n^2}$ に対して，$k \in I_x$ となる符号 x の集合を $C_k \subset C$ とする。$\cup_{x \in C_k} I_x \subset Z_{n^2}$ であり，互いに異なる符号の任意の対 $x, y \in C$ に対して，条件(1)，(2)より $I_x \cap I_y = \{k\}$ なので，

$$\#\left(\bigcup_{x \in C_k} I_x\right) = \#C_k \cdot (n-1) + 1 \leq \#Z_{n^2} = n^2$$

である。故に

$$\#C_k \leq \frac{n^2 - 1}{n-1} = n + 1$$

となる。各符号 $x \in C$ はちょうど n 個の部分集合 C_k に含まれる。従って

$$n \cdot \# C = \sum_{k \in Z_{n^2}} \# C_k \leq n^2 (n+1)$$

であり，

$$\# C \leq n(n+1)$$

である。

この結果は，問題としている n^2 人の生徒の班分けは最大 $n+1$ 回しかできないことを示している。以下の節で，n が素数 p とその平方 p^2 の場合にはこの最大回数の班分けが可能であることを示す。

3．素数 p の場合

本節では n が素数 p の場合を扱う。この場合，条件(1)，(2)を満たし，$\# C_0 = p(p+1)$ であるような集合 C_0 を構成でき，$\# C$ の最大値は $p(p+1)$ であることが分かる。

各対 $j, k \in Z_p$ に対して $I(j, k) = \{ ip + [ij+k]_p \mid i \in Z_p \}$ とする。集合 $I(j, k)$ はこれを有効添え字として持つ符号 $x(j, k) \in X = (\mathrm{F}_2)^{\oplus p^2}$ を一意的に定める。C_0' を各対 $j, k \in Z_p$ に対する符号 $x(j, k)$ からなる集合，C_0'' を各 $j \in Z_p$ に対して有効添え字 $I_j = \{ jp + i \mid i \in Z_p \}$ を持つ符号 x_j からなる集合とし，$C_0 = C_0' \cup C_0''$ とする。集合 C_0 が求めるものであることを示そう。

各対 $j, k \in Z_p$ に対して $\# I(j, k) = \# Z_p = p$ であり，各 $j \in Z_p$ に対して $\# I_j = \# Z_p = p$ である。故に条件(1)は満たされる。

条件(2)を確かめるために，次の 3 つの場合を扱う：

(i)　任意の 2 つの対 (j, k)，$(j', k') \in Z_p \times Z_p$ に対して，$I(j, k) \cap I(j', k') \neq \emptyset$ である場合

(ii)　任意の $j, j' \in Z_p$ に対して，$I_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$ である場合

(iii)　任意の $j, k, j' \in Z_p$ に対して，$I(j, k) \cap I_{j'} \neq \emptyset$ である場合

(i)の場合，$ip + [ij+k]_p = i'p + [i'j'+k']_p$ を満たす $i, i' \in Z_p$ があり，このとき $i = i'$ 及び $i(j-j') \equiv k' - k \pmod{p}$ である。$j = j'$ の場合，$k = k'$ すなわち $(j, k) = (j', k')$ である。$j \neq j'$ の場合，$j - j'$ は p を法として可逆であり，異なる 2 対 (j, k)，$(j', k') \in Z_p \times Z_p$ について $i(j-j') \equiv k' - k \pmod{p}$ を満たす $i \in Z_p$ は一意的である。これは $I(j, k) \cap I(j', k') \neq \emptyset$ のとき，$\#(I(j, k) \cap I(j', k')) = p$ または 1 であることを示している。

(ii)の場合，ある $i, i' \in Z_p$ について $jp + i = j'p + i'$ を満たし，このとき $j = j'$ 及び $i = i'$ である。すなわち $I_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$ のとき，$\#(I_j \cap I_{j'}) = p$ である。

(iii)の場合，$ip + [ij+k]_p = j'p + i'$ を満たす $i, i' \in Z_p$ があり，$i = j'$ 及び $ij + k \equiv i' \pmod{p}$ である。この関係式は各三つ組 $j, k, j' \in Z_p$ に対して一意的な解 $i, i' \in Z_p$ を持つ。従って $\#(I(j, k) \cap I_{j'}) = 1$ である。

以上の議論より条件(2)の成立することが確かめられた。

さて，集合 C_0 の要素の個数を求めよう。場合(iii)の議論から $C_0' \cap C_0'' = \varnothing$ であることが分かり，場合(i)の議論から異なる対 (j, k)，$(j', k') \in Z_p \times Z_p$ に対して異なる符号 $x(j, k) \neq x(j', k') \in C_0'$ が得られることが分かる。従って

$$\# C_0 = \# C_0' + \# C_0'' = p^2 + p = p(p+1)$$

を得る。これが示したい最大値である。

4．素数 p の平方 p^2 の場合

本節では n が素数 p の平方 p^2 の場合を扱う。$\# C_0 = p^2(p^2+1) = n(n+1)$ であるような符号の集合 C_0 を構成しよう。$p=2$ すなわち $n=4$ の場合は本節の最後に別に扱うことにし，まず $p>2$ のときを扱う。

$\alpha \in Z_p$ を p を法とするある平方非剰余[1]とする。対 $J = (j_1, j_2)$，$K = (k_1, k_2) \in Z_p \times Z_p$ に対して，添え字集合

$$I(J, K) = \{ (i_1 p + i_2)p^2 + [i_1 j_1 + \alpha i_2 j_2 + k_1]_p p + [i_1 j_2 + i_2 j_1 + k_2]_p \mid i_1, i_2 \in Z_p \}$$

と

$$I_J = \{ (j_1 p + j_2)p^2 + (i_1 p + i_2) \mid i_1, i_2 \in Z_p \}$$

を定める。C_0' 及び C_0'' を，それぞれ，有効添え字 $I(J, K)$ を持つ符号 $x(J, K)$ からなる集合，有効添え字 I_J を持つ符号 x_J からなる集合とする。このとき，集合 $C_0 = C_0' \cup C_0''$ が求めるものである。すなわち，

(1)　任意の符号 $x \in C_0$ に対して，$\# I_x = n$ である。

(2)　任意の符号の対 $x, y \in C_0$ に対して，$\# (I_x \cap I_y)$ は n，1，0 のいずれかに等しい。

任意の $J, K \in Z_p \times Z_p$ について $\# I(J, K) = p^2$ 及び $\# I_J = p^2$ なので，C_0 は条件(1)をみたす。

条件(2)を確かめるために，次の3つの場合を扱う：

(i)　任意の2つの対 (J, K)，$(J', K') \in (Z_p \times Z_p) \times (Z_p \times Z_p)$ に対して，$I(J, K) \cap I(J', K') \neq \varnothing$ である場合

(ii)　任意の $J, J' \in Z_p \times Z_p$ に対して，$I_J \cap I_{J'} \neq \varnothing$ である場合

(iii)　任意の $J, K, J' \in Z_p \times Z_p$ に対して，$I(J, K) \cap I_{J'} \neq \varnothing$ である場合

(i)の場合，ある $I = (i_1, i_2)$，$I' = (i_1', i_2') \in Z_p \times Z_p$ について

$$\begin{aligned}(i_1 p + i_2)p^2 &+ [i_1 j_1 + \alpha i_2 j_2 + k_1]_p p + [i_1 j_2 + i_2 j_1 + k_2]_p \\ &= (i_1' p + i_2')p^2 + [i_1' j_1' + \alpha i_2' j_2' + k_1']_p p + [i_1' j_2' + i_2' j_1' + k_2']_p\end{aligned}$$

なので，

$$i_1 = i_1'$$

$$i_2 = i_2'$$

$$[i_1 j_1 + \alpha i_2 j_2 + k_1]_p = [i_1' j_1' + \alpha i_2' j_2' + k_1']_p$$

$$[i_1 j_2 + i_2 j_1 + k_2]_p = [i_1' j_2' + i_2' j_1' + k_2']_p$$

となる。従って，

[1] 奇素数 p と素な整数 a がある整数 n について $n^2 = a \pmod p$ となるとき，a を平方剰余といい，そうでないとき平方非剰余という([2])。

$$i_1(j_1-j_1')+i_2\alpha(j_2-j_2')\equiv k_1-k_1' \pmod p$$
$$i_1(j_2-j_2')+i_2(j_1-j_1')\equiv k_2-k_2' \pmod p$$

である。もし $j_2-j_2'\not\equiv 0 \pmod p$ ならば，$r(j_2-j_2')\equiv 1 \pmod p$ をみたす $r\in Z_p$ が存在する。α は p を法として平方非剰余なので，方程式 $(r(j_1-j_1'))^2\equiv\alpha \pmod p$ は解 $r(j_1-j_1')\in Z_p$ を持たない。従って，任意の j_1，$j_1'\in Z_p$ に対して $(j_1-j_1')^2-\alpha(j_2-j_2')^2\not\equiv 0 \pmod p$ であり，上の p を法とする連立線形方程式は一意解 $I=(i_1,\ i_2)\in Z_p\times Z_p$ を持つ。故に $\#(I(J,\ K)\cap I(J',\ K'))=1$ である。もし $j_2-j_2'\equiv 0 \pmod p$ かつ $j_1-j_1'\not\equiv 0 \pmod p$ であれば，やはり一意解 $I=(i_1,\ i_2)\in Z_p\times Z_p$ を持ち，$\#(I(J,\ K)\cap I(J',\ K'))=1$ である。もし $j_1-j_1'\equiv j_2-j_2'\equiv 0 \pmod p$ ならば，$k_1-k_1'\equiv k_2-k_2'\equiv 0 \pmod p$ であり，$J=J'$，$K=K'$ すなわち $\#(I(J,\ K)\cap I(J',\ K'))=\#I(J,\ K)=p^2$ である。

(ii)の場合，ある $I=(i_1,\ i_2)$，$I'=(i_1',\ i_2')\in Z_p\times Z_p$ について

$$(j_1p+j_2)p^2+(i_1p+i_2)=(j_1'p+j_2')p^2+(i_1'p+i_2')$$

である。従って $(i_1,\ i_2,\ j_1,\ j_2)=(i_1',\ i_2',\ j_1',\ j_2')$ である。すなわち $I_J\cap I_J'\neq\emptyset$ ならば $\#(I_J\cap I_J')=p^2$ である。

(iii)の場合は

$$(i_1p+i_2)p^2+[i_1j_1+\alpha i_2j_2+k_1]_p p+[i_1j_2+i_2j_1+k_2]_p=(j_1'p+j_2')p^2+(i_1'p+i_2')$$

である。連立方程式

$$i_1=j_1'$$
$$i_1=j_2'$$
$$[i_1j_1+\alpha i_2j_2+k_1]_p=i_1'$$
$$[i_1j_2+i_2j_1+k_2]_p=i_2'$$

を得るので，対 I，$I'\in Z_p\times Z_p$ は J，K，$J'\in Z_p\times Z_p$ により一意的に定まる。従って，$I(J,\ K)\cap I_{J'}\neq\emptyset$ のとき $\#(I(J,\ K)\cap I_{J'})=1$ である。

以上の 3 つの場合の議論により条件(2)の成立することが分かる。

最後に集合 C_0 の要素の個数を求めよう。(iii)の議論から $C_0'\cap C_0''=\emptyset$ であることが分かる。また，(i)の議論から異なる組 $(j_1,\ j_2,\ k_1,\ k_2)\neq(j_1',\ j_2',\ k_1',\ k_2')$ は異なる符号 $x(J,\ K)\neq x(J',\ K')\in C_0'$ を与える。従って

$$\#C_0=\#C_0'+\#C_0''=p^4+p^2=p^2(p^2+1)=n(n+1)$$

であり，これが求めるものであった。

さて，$n=2^2=4$ の場合を扱って本節を終える。J，$K\in Z_2\times Z_2$ に対して添え字集合

$$I(J,\ K)=\{(2i_1+i_2)2^2+[i_1j_1+i_2j_2+k_1]_2 2+[i_1(j_1+j_2)+i_2j_1+k_2]_2 \mid i_1,\ i_2\in Z_2\}$$
$$I_J=\{(2j_1+j_2)2^2+(2i_1+i_2)\mid i_1,i_2\in Z_2\}$$

を定める。C_0' 及び C_0'' を，それぞれ，有効添え字 $I(J,\ K)$ を持つ符号 $x(J,\ K)$ の集合，有効添え字 I_J を持つ符号 x_J の集合とし，集合 C_0 を $C_0'\cup C_0''$ で定める。

各 J，$K\in Z_2\times Z_2$ に対して $\#I(J,\ K)=4$ 及び $\#I_J=4$ である。$I(J,\ K)\cap I(J',\ K')\neq\emptyset$ と仮定すると

$$i_1=i_1'$$

$$i_2 = i_2'$$
$$[i_1 j_1 + i_2 j_2 + k_1]_2 = [i_1' j_1' + i_2' j_2' + k_1']_2$$
$$[i_1(j_1 + j_2) + i_2 j_1 + k_2]_2 = [i_1'(j_1' + j_2') + i_2' j_1' + k_2']_2$$

である。従って

$$i_1(j_1 - j_1') + i_2(j_2 - j_2') \equiv k_1 - k_1' \pmod 2$$
$$i_1((j_1 - j_1') + (j_2 - j_2')) + i_2(j_1 - j_1') \equiv k_2 - k_2' \pmod 2$$

である。$(j_1 - j_1')^2 + (j_1 - j_1')(j_2 - j_2') + (j_2 - j_2')^2 \not\equiv 0 \pmod 2$ならばこの連立線形方程式は一意的解 $I = (i_1, i_2) \in Z_2 \times Z_2$ を持つ。$(j_1 - j_1')^2 + (j_1 - j_1')(j_2 - j_2') + (j_2 - j_2')^2$ が 0 となるのは $j_1 - j_1' \equiv j_2 - j_2' \equiv 0 \pmod 2$のとき，すなわち$J = J'$ のときのみである。この場合 $K = K'$ であり，$\#(I(J, K) \cap I(J', K')) = 4$ である。$J \neq J'$ のときは$\#(I(J, K) \cap I(J', K')) = 1$ である。次に $I_J \cap I_{J'} \neq \emptyset$ と仮定すると $j_1 = j_1'$ 及び $j_2 = j_2'$ すなわち $J = J'$ なので，$\#(I_J \cap I_{J'}) = p^2$ である。最後に $I(J, K) \cap I_{J'} \neq \emptyset$ のときは

$$i_1 = j_1'$$
$$i_1 = j_2'$$
$$[i_1 j_1 + i_2 j_2 + k_1]_2 = i_1'$$
$$[i_1(j_1 + j_2) + i_2 j_1 + k_2]_2 = i_2'$$

となる。対 $I, I' \in Z_2 \times Z_2$ は $J, K, J' \in Z_2 \times Z_2$ により一意的に定まり，$\#(I(J, K) \cap I_{J'}) = 1$ である。こうして条件(2)が確かめられる。

集合 C_0 の要素の個数を求めると，上と同様に$\# C_0 = 4(4+1)$を得る。

5．結び

前節までに n が素数 p 及びその平方 p^2 の場合は$\# C$ の最大値の上限が実現できることを示した。n が合成数あるいは $p^e (e > 2)$の場合には，同様に上限が実現できるかどうか確認していない。もっとも簡単な $n = 6 (= 2 \cdot 3)$あるいは $n = 8 (= 2^3)$の場合であっても 7 回$(= 6 + 1)$あるいは 9 回$(= 8 + 1)$班分けを繰り返すことが可能かどうか不明である[2]。

問題自体は非常に平易な言葉で表現でき，その内容も平易であるため，中学生あるいは高校生にも問題の意味するところは充分理解できると思われる。また，$n = 2$ の場合は 4 名の生徒を 2 名ずつの班に分けること，$n = 3$ の場合は 9 名の生徒を 3 名ずつの班に分けることなので，具体的にすべての可能性を列記できる。これらを示した後に $n = 5, 7$ などの小さい素数の場合を考察するよう促せば，n が素数の場合において最適解を得るための一般的法則を比較的容易に見出しうると期待できる。今回の学習指導要領の改定で高等学校において整数の性質を詳しく扱うこととなったが，その教材の一つとして利用できる。一般の素数でその最適解を得る方法を定式化することは高校生には困難と思われるが，具体的に与えられた素数に対して最適解を表現する方法を考察させることは，昨今強調される数学的活動の場を提供することになろ

[2] その後，$n = 6$ の場合は 7 回の班分けが不可能であり，上限が実現できないこと，$n = 8$ の場合は上限の 9 回の班分けが可能であることが分かっているが一般的解決には至っていない。

う。

さらに，数学教員養成の教育の場においては，n が素数の場合における最適解を得る方法を一般的に考察させることは，初等整数論の初歩として充分な内容を持つ。上級者に対しては n が素数の平方 p^2 の場合の最適解を与える方法の理解に取り組むよう奨励すればよい。その中で平方剰余・非剰余という整数論の重要な概念に触れる機会が得られることも見逃せない。本稿では，冒頭に提起した問題を符号理論の用語で定式化し，初等整数論の基本概念を用いて最適解を導出して見せたが，問題の数学的内容は数え上げ組合せ論の範疇である。ここでの方法とは異なる定式化を模索させることもまた，数学的思考法を広げるのに役立つであろう。

冒頭の問題は学校現場で実際に生じる可能性もあり，その意味でも面白いものである。25 人クラスでは，ここに示した方法で 5 人ずつの班分けを 6 回すれば，どの生徒も他のすべての生徒と 1 度は同じ班になり，2 度は同じ班にはならないようにできるのである。

本稿は，筆者の指導生の林亜弥乃さんとの雑談の産物である。ある授業において受講生を班分けする必要性があり，その班分けについて彼女ら筆者の指導生何人かとの雑談の話題にしたところ，意外にも強く興味を示してくれたことによる。彼女は 16 名（$n=4$ の場合）の学生の班分け問題の最適解を一晩で作って見せてくれた。更により人数の多い場合にも挑戦する姿勢を示したが，残念ながら一般的解決には至らなかった。しかしながら，楽しげに問題に取り組む様子から，学生が興味を持ちやすい身近で具体的な練習問題としての利用を想起するにいたった。本稿の発端を作ってくれた指導生たちに感謝したい。

■参考文献

［1］植松友彦，「代数系と符号理論」オーム社，2010
［2］山本芳彦，「数論入門」岩波書店，2003