

原著 (Article)

高等学校数学における言語活動の充実

——主として「活用」に関する問題の作成枠組みに着目して——

**Improvement of Language Activities on School Mathematics
for High school students
Focused on the Framework for Making Problem of
Mathematical application**

高橋 聡
Takahashi Satoshi*

摘 要

本稿ではまず、「全国学力・学習状況調査（中学校数学）」の主として「活用」に関する問題の作成枠組みが学校数学における言語活動の充実に深く関与していることを、文部科学省関連資料より明らかにした。その上で、主に「様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」を活用する数学的プロセスを重視した言語活動の必要性を指摘し、高等学校数学における言語活動の充実に図るための、高等学校数学 A「整数の性質」に関連する課題案を提示した。

キーワード：高等学校数学，言語活動，全国学力・学習状況調査

Key words：High School mathematics, Language activities (Gengo-Katsudo),
National Assessment of Academic Ability in Japan

1. はじめに

(1) 高等学校数学と言語活動

周知の通り、平成 20（2008）年 3 月および平成 21（2009）年 3 月に改訂告示された小・中・高等学校学習指導要領では、思考力・判断力・表現力等の育成の観点から、知識・技能の活用を重視し言語活動を充実させることがすべての校種の教科・領域を貫く重要な視点とされた。これは平成 20（2008）年 1 月の中央教育審議会答申¹の影響と見做されるのが一般的であるが、実はその核心部は、平成 19（2007）年 11 月に公開された中央教育審議会教育課程部会「教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ」²（以下、〈審議のまとめ〉と略す）から引き継がれたものである。

そこで指摘されたことは、知識・技能の活用など思考力・判断力・表現力等をはぐくむための学習活動が整理された上で、それら学習活動が「すべての教科で取り組まれるべきもの」であり、「数式などを含む広い意味での言語」が重要な役割を担うことであった³。このような言語観の拡張ともいえるべき画期的な方向性が示されたことを受け、高等学校数学科では、数学的活動に関わって「自らの考えを数学的に表現し

根拠を明らかにして説明したり，議論したりすること」が日常的な授業に要請され⁴，そのための具体的な学習活動が例示されるに至った⁵。

このような目標が掲げられた高等学校数学であるが，実際の学習指導の状況は必ずしも良好ではない。例えば，言語活動を伴う数学的活動を積極的に取り入れるべき課題学習に関する教科書記述が必ずしも十分といえないこと⁶，あるいは，日常的な授業における言語活動への取り組みが充分とは言えない上，生徒の言語活動を如何に評価するかという大きな課題が残されていることなどが指摘されている⁷。このような状況が続けば，高等学校数学において言語活動の充実を図ることは，相当困難であると言わざるを得ない。

(2) 本稿の目的

以上のような高等学校数学と言語活動を取り巻く現状がある一方で，小学校算数や中学校数学の現状に目を向けると，学習指導要領に示された教育内容を具現化し，算数・数学学習における児童・生徒の理想の姿を想定した問題を用いた調査が，継続的に実施されていることが知られている。その調査とは，平成19年度から実施されている「全国学力・学習状況調査」である⁸。実際，その解説資料⁹には毎回，以下と同様な趣旨の文言が掲載されている。

この調査においては，児童生徒一人一人の学力や学習状況の把握はもとより，今後の指導や学習の改善に生かしていくことが重要であるため，調査問題の作成に当たっては，学習指導要領に示されている内容が正しく理解されるよう留意するとともに，児童生徒に身に付けさせたい力として重視されるものについての具体的なメッセージとなるように努めました。(国立教育政策研究所，2012，p.1)

すなわちこの調査は，児童・生徒が実際に取り組むことを念頭に置いて検討された，授業実践での模範となり得る課題を用いた調査なのである。さらに，本稿で考察するように，この調査で出題されている「主として『活用』に関する問題」のうち，中学校数学の出題問題の作成枠組みが，学校数学での言語活動の充実に深く関与していると判断できる。したがって，この枠組みを検討することは，高等学校数学での言語活動を通じた学習指導を充実させるための議論に大きな示唆を与えることにつながる。

以上の理由により本稿では，学校数学における言語活動の充実と主として「活用」に関する問題の作成枠組みの関係を明らかにした上で，高等学校数学において言語活動の充実を図るための課題案を提示することを目的とする。

2. 学校数学に期待される言語活動

(1) 言語活動をめぐる議論

今回の学習指導要領改訂の主要な方向性として学びにおける言葉の重視が明示されたのは、平成 18（2006）年 2 月に公表された、中央教育審議会初等中等分科会教育課程部会による「審議経過報告」（以下、〈経過報告〉と略す）が最初であった。そこでは、「学習や生活の基盤づくりの重視」に関連する議論の中で、「言葉を重視することが大切であるとの意見」が数多く示されたことを受け、言葉が「『確かな学力』を形成するための基盤」であり、「他者を理解し、自分を表現し、社会と対話するための手段」であること、そしてその育成は「すべての教育活動を通じて」重視することが要請された¹⁰。さらに、「各教科等を横断してはぐくむべき能力」として、4つの能力が具体的な例示とともに示された。以下には提示された能力を示す。

- ① 体験から感じ取ったことを表現する力（感性や想像力を生かす）
- ② 情報を獲得し、思考し、表現する力（言語や情報を活用する）
- ③ 知識・技能を実生活で活用する力（知識や技能を活用する）
- ④ 構想を立て、実践し、評価・改善する力（課題探究の技法を活用する）

（文部科学省中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会，2006，pp. 18-19）

この数か月後、中央教育審議会とは独立した初等中等教育に関わる調査研究協力者会議の一つとして、言語力育成協力者会議が組織される。そこでは、言語力育成について、児童・生徒の発達段階に応じた教科横断的視点から約一年をかけて議論が為された。その成果を集約した「言語力の育成方策について（報告書案）」¹¹（以下、〈報告書案〉と略す）が平成 19（2007）年 8 月に公表されたが、その記述内容は、直後の 11 月に公開された〈審議のまとめ〉に多大な影響を与えることとなった。最も明らかな影響は、教育内容に関する主な改善事項の最初の項目に「言語活動の充実」が新たに掲げられたことである¹²が、本稿では寧ろ、思考力・判断力・表現力等を育むための学習活動の分類が「言語に関する専門家などの知見を得て検討」された結果、6つに分類整理され活動例とともに示された点に注目したい¹³。そこで提示された6つの学習活動は以下の通りである。

- ① 体験から感じとったことを表現する
- ② 事実を正確に理解し伝達する
- ③ 概念・法則・意図などを解釈し、説明したり活用したりする
- ④ 情報を分析・評価し、論述する
- ⑤ 課題について、構想を立て実践し、評価・改善する
- ⑥ 互いの考えを伝え合い、自らの考えや集団の考えを発展させる

（文部科学省中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会，2007，p. 25）

これら6つの学習活動の原型が〈経過報告〉での4つの能力であることは明白であろう。次項では、この修正・変更の背景にある〈報告書案〉の趣旨を、学校数学を議論する立場から明らかにする。

(2) 学校数学で育成すべき言語に関する能力

1) 知的活動に関すること

〈報告書案〉では、言語は知的活動（特に思考や論理）の基盤であるとして、次の3つの能力育成が強調された。

- (1) 事実を正確に理解し、的確に分かりやすく伝える技能を伸ばす
- (2) 自らの考えを深めることで、解釈や説明、評価や論述をする力を伸ばす
- (3) 考えを伝え合うことで、自らの考えや集団の考えを発展させる力を伸ばす

（文部科学省，2007）

第1に挙げられた技能育成については、元来「国語科を中心として」育成にあたってきたが、すべての教科・領域を通じた育成がより一層強調されたことを意味する。無論、算数・数学科も例外ではない。なお、主としてこの項目が〈審議のまとめ〉での学習活動②の新設に関わると考えられる。

第2に示された内容は、例えば、「根拠や論理（推論）に基づいて、筋道を立てて考えを説明する」能力や、「概念の意味を理解し、その概念を用いて説明」したり、「情報の意味を解釈し、説明」したりする能力の育成に関わっている。これらは、これまでの学校数学の議論においても最も重要視すべき目的の一つに位置付けられてきた内容である。特に前者の「根拠や論理（推論）に基づいて、筋道を立てて考えを説明する」能力育成に向けて、「具体的な事象から概念を導き出したり、具体的な事象に当てはめて説明したりする活動」が改めて重要視されているが、このような類比・帰納・演繹の各種推論を用いて事柄の真偽を論理的に説明する活動こそ、学校数学の文脈で最も重要視されてきた活動といえる。その意味でも、この第2に示された内容が、算数・数学科で特に育成に取り組むべき能力に深く関わっている。このような趣旨が、〈経過報告〉の育成すべき能力②③が再検討され、〈審議のまとめ〉での学習活動③④に修正された事実の背景に位置づく。

3つ目の項目に関わる能力に関しては、「自らの考え、あるいは集団の考えを発展させていくためには、考えを伝え合うこと（他者との対話）によりお互いの考えを深めていく活動が求められる」とされた。この考え方は、次に記述する内容にも深く関わる。

2) 他者とのコミュニケーションに関すること

他者との対話において「考えを明確にし、自己を表現し、あるいは他者を理解し、他者と意見を共有し、お互いの考えを深めていくこと」は、共同生活を行う上では不可欠な能力である。したがって〈報告書案〉では別項目として扱われている「知的活動に関すること」と「他者とのコミュニケーションに関すること」とは、相補的な内容であるといえる。

この捉え方は、特に、実際の授業における学習活動を想定した場合には重要な意味をもつ。加えて、先に述べた知的活動に関する第3の能力の育成とも関わって、以下に示す記述は、算数・数学科で育成すべき言語に関する能力を検討する上でも、また数学が発展してきた過程に関わるという意味でも、極めて重要な視点を与えている。

議論は、時に他者と対立するものととらえられ敬遠されがちであるが、対話すること、議論することを通して、自分の思考・理解が深まり新たな発想が生まれるという実感、他者とかかわりながらよりよく問題解決をする楽しさが味わえるという意識を培うことが望まれる。(文部科学省, 2007)

以上のような趣旨が反映され、〈審議のまとめ〉学習活動⑥の新設に至ったと考えられる。

3) 算数・数学科の特質を踏まえた指導の充実に関すること

〈報告書案〉では、各教科・領域を横断する基本的な考え方を示した後、学習指導要領に記載された各教科の内容との関連において言語力の育成について言及している。算数・数学科に関連する内容は、大きく2つの項目に分けた記述が為されているが、以下には、その記述内容を本稿の目的にあわせて筆者が整理したものを示す¹⁴。

- (i) 筋道を立てて説明したり論理的に考えたりして、自ら納得したり他者を説得したりする指導を行う。
- (ii) 帰納的な考え方や類比の考え方、予測や推測を検証するための演繹的な考え方はごくむ必要があり、それらの考え方をよりよく用いるために必要な言語力を身に付けさせる。
- (iii) 事実の説明あるいは理由や手順の説明の仕方を身に付けさせる。
- (iv) 根拠を基にして、ある事柄が「正しい」「正しくない」ということを明確に説明できるようにする。(文部科学省, 2007. (項目の設定は引用者による))

これらが〈審議のまとめ〉での6つの学習活動との横断的な関わりをもつことは疑いない。その中でも、学習活動③④⑤との直接的な関わりをもつ事項が数多く挙げられていることは特筆すべきである。さらに注目したいのが、それらの多くは結果として得られる数学的事実ではなく、寧ろその結果を得る過程で用いられる方法や考え方な

どの方法知の学びに関わっている事実である。

(3) 算数・数学科での対応

以上のように言語活動に関わる議論が中教審答申に反映され、その趣旨が新しい学習指導要領に、そして算数・数学科の内容に大きな影響を与えるに至った。文言の記述という観点からも、小学校算数科の算数的活動の例示に「言葉、数、式、図を用い」る活動や「説明する活動」が頻出すること¹⁵、そして中学校数学科の数学的活動の例示の一つとして、第1学年では「数学的な表現を用いて、自分なりに説明し伝え合う活動」が、第2、3学年では「数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」がそれぞれ挙げられていること¹⁶などは、その影響の大きさを裏付ける論拠となろう。これらを総合すれば、算数・数学科における言語活動の充実、算数・数学的活動を通して行われることが意図されていると見做し得る。

3. 主として「活用」に関する問題と言語活動

前章で概観した算数・数学科における言語活動の充実への動向が、平成19年度から実施されている「全国学力・学習状況調査(中学校数学)」(以下、全国調査と略す)に如何なる影響を与えたかを明らかにすることが、本章の目的である。

全国調査で出題されている問題が、生徒の学力や学習状況を把握・分析するだけでなく、学習指導要領に示された教育内容を通じて身につけるべき能力を具現化し、数学学習を通じて育成されるべき生徒の理想の姿を想定したものになっていることは、本稿冒頭で述べた通りである。以下では初めに、平成24年度調査の解説資料の記述から、その問題作成枠組みの実際を明らかにする。

(1) 問題作成枠組みの実際

全国調査の問題作成に係る基本理念は、「各学校段階における各教科等の土台となる基盤的な事項に絞った」上で、「身に付けておかなければ後の学年等の学習内容に影響を及ぼす内容や、実生活において不可欠であり常に活用できるようになっていることが望ましい知識・技能など」を問う問題(「主として『知識』に関する問題」と「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や、様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などにかかわる内容」を問う問題(「主として『活用』に関する問題」)に整理されている¹⁷。前者については、例えば「整数、小数、分数等の四則計算をすること」、「図形の性質がわかること」など数学科で学ぶ内容に直接関わる観点が挙げられている一方で、後者では、例えば「与えられた情報を分類整理したり必要なものを適切に選択したりすること」や「筋道を立てて考えたり振り返って考えたりすること」など、数学を考えていくプロセスに関わる観点、すなわち数式などを含む言語を用いて説明することに関わる観点が例示された¹⁸。これら観点を基にして中学校数学科の指導のねらいと照らし合わせて、如何なる場面で、如何なる数

表 1：主として「活用」に関する問題作成の枠組み（国立教育政策研究所，2012，p. 9）

活用する力	活用の文脈や状況	主たる評価の観点	活用される数学科の内容	数 学 的 な プ ロ セ ス
α ： 知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力	実生活や身の回りの事象での考察	数学的な見方や考え方	数と式	$\alpha 1$ ：日常的な事象等を数値化すること $\alpha 1(1)$ ものごとを数・量・図形等に着眼して観察すること $\alpha 1(2)$ ものごとの特徴を的確にとらえること $\alpha 1(3)$ 理想化，単純化すること $\alpha 2$ ：情報を活用すること $\alpha 2(1)$ 与えられた情報を分類整理すること $\alpha 2(2)$ 必要な情報を適切に選択し判断すること $\alpha 3$ ：数学的に解釈することや表現すること $\alpha 3(1)$ 数学的な結果を事象に即して解釈すること $\alpha 3(2)$ 解決の結果を数学的に表現すること
β ： 様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力	他教科などの学習	数学的な表現・処理	図 形	$\beta 1$ ：問題解決のための構想を立て実践すること $\beta 1(1)$ 筋道を立てて考えること $\beta 1(2)$ 解決の方針を立てること $\beta 1(3)$ 方針に基づいて解決すること $\beta 2$ ：結果を評価し改善すること $\beta 2(1)$ 結果を振り返って考えること $\beta 2(2)$ 結果を改善すること $\beta 2(3)$ 発展的に考えること
γ ： 上 記 α ， β の両方にかかわる力	算数・数学の世界での考察	数量，図形などについての知識・理解	数量関係	$\gamma 1$ ：他の事象との関係をとらえること $\gamma 2$ ：複数の事象を統合すること $\gamma 3$ ：多面的にもものを見ること

学的な知識・技能などが用いられ，さらには，それぞれの場面で，生徒の如何なる能力を評価するかを明確に示すための視点が検討された。このような議論をまとめた枠組みが表 1 である¹⁹。さらに，このような趣旨を生かした調査を適切に行うために，以下に示す 3 つのタイプの記述式の問題が，各調査で一定割合ずつ出題されている。

- (a) 見いだした事柄や事実を説明する問題
- (b) 事柄を調べる方法や手順を説明する問題
- (c) 事柄が成り立つ理由を説明する問題
 - (c-1) 明示された説明すべき事柄の根拠を記述する形式
 - (c-2) 説明すべき事柄を判断し，その根拠を記述する形式

（国立教育政策研究所，2012，p. 10）

(2) 言語活動の充実との関連性の考察

表1の数学的なプロセスの欄に記述された文言とその意味を踏まえると、それらと〈審議のまとめ〉に示された学習活動③④⑤との直接的関与を認めることができる。この事実は、この調査問題の作成枠組みが数学科における言語活動のより一層の充実を目指す一連の文脈に位置づくという推測の妥当性を、強く支える論拠となろう。

例を挙げて詳述する。〈審議のまとめ〉の学習活動⑤として挙げられた「課題について構想を立て実践し、評価・改善する」学習活動は、数学科の文脈では、「帰納的な考え方や類比の考え方、予測や推測を検証するための演繹的な考え方」を駆使して「筋道を立てて説明したり論理的に考えたり」する活動として〈報告書案〉に具体化されている。その活動のプロセスを辿る際の要点が、表1の「活用する力」「 β ：様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」に該当する数学的なプロセスとして明示されているのである。また、記述式問題のタイプ(a)とタイプ(b)・(c)はそれぞれ、数学的プロセス $\alpha 3 \cdot \beta 2$ と $\beta 1$ において、主として要求される能力を評価するための問題と見做せる。

このように対応関係を分析すると、数学科において言語活動の充実を図るためには、主に数学的なプロセス β に示された「様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」を活用する数学的プロセスを含む学習活動を意図することと判断し得る。この立場から〈審議のまとめ〉の学習活動を振り返ると、数学科では主に学習活動④⑤を念頭に置いた言語活動を展開しながら、その活動に付随する他の学習活動をも含めた一連の活動を通じて、言語に関する能力育成を目指すことが求められているといえる。勿論、この一連の学習活動の教育的意義は、数学科の範疇に留まるものではない。何らかの困難に遭遇した際、その状況をどのように分析把握し、より良い改善の方向を見出し解決に至るかという、一般的な意味での問題解決場面においても有効な、より広い意味での確かな学力の育成につながるはずである。

なお、例えば中学校数学科第3学年では、「既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見だし、発展させる活動」などを含む数学的活動を行うこととされている²⁰が、これら活動の特徴は、数学的なプロセス β を促す活動と酷似している。その意味でも、数学的活動を通じた言語活動の充実を意図することが、実際の授業構成を検討する際の最も重要な観点になるといえよう。

4. 高等学校数学における言語活動の充実

前章までの考察で明らかとなったのは、中学校数学では言語活動の充実を目指し、数学的なプロセス β に重心を置きつつ、数学的なプロセス α やその他の数学的プロセスに関わる活動を展開することが意図されていることである。高等学校数学でも教科の特性や学習指導の継続性を考慮し、同様な方向性を維持しながら言語活動の充実を目指すことが妥当といえる。

(1) 実施に向けた基本的前提

言語活動の実践に関わる考察を進める前に、そのための2つの前提を確認しておく。その1つは、言語活動の意味や質についての共通理解である。この共通理解の必要性は、高等学校数学科では「グループでの相談や一方的な説明などに留まってしまい、数学科の学習指導の特質を踏まえた言語活動に到達していない」場合が多いという指摘²¹から示唆される。前章で明らかにしたように、言語活動は単にことばを伴う活動を意味するのではない。その活動の目的や意味、あるいは教科での位置づけなど、総合的な視点から言語活動を捉える必要がある。

もう1つは、主体的な言語活動を実践し得る生徒集団の存在を仮定する点である。高等学校数学科では、残念ながら、今日に至ってもなお、一方的な講義型の授業の存在を否定できない。そのような授業に慣れてしまった生徒や生徒集団は、学習に対して受動的で、いわゆる“開かれた”課題への取り組みが消極的である傾向が非常に強い。この点に関して、本稿では、何らかの方法である程度主体的に数学的課題に取り組むことができるように成熟した生徒集団を仮定して、具体的考察を進める。なお、当然ながらこの仮定は、対象とする生徒集団が高度な数学的能力を有することを求めているわけではない。

(2) 特に重要視すべき数学的なプロセス

高等学校数学に相応しい充実した言語活動を構想する上で、特に重要視したい数学的なプロセスに関して、いくつかの先行研究から事前に検討しておく。本稿ではそのための視点を、全国調査において毎回同じ趣旨で出題された問題に着目して検討課題を提示している岩田(2012)²²に求める。

1) 目的に応じた資料の収集・整理、および情報の取捨選択・活用(主として $\alpha 2$)

数学に限定せず、一般的に問題解決場面を想定すると、そこでは常に情報過多あるいは情報不足の状況がある。したがって、問題解決を目指す者がまず行わなければならないのは「目的に応じて資料を収集・整理したり、必要な情報を選択・処理したりすること」である²³。これは主に、表1における数学的なプロセス $\alpha 2$ に関わる内容で、広い意味での情報活用能力と呼んで良いだろう。

教科の特性も影響していたと考えられるが、これまで数学科の授業では、数学的に完結している問題、すなわち教師が周到に準備した“うまくいく問題”を提示する機会が多かったかもしれない。しかしながら、生徒の情報の取捨選択を的確に行う能力育成を目的に据える場合には、生徒の程度・状況に合わせて、敢えて、必要な情報を曖昧に提示したり直接的な関わりの薄い情報を提示したりすることにも、数学教育的な意義を認めたい。言わば、“うまくいかない問題”を周到に準備するのも教師の役割であると認識したい。

2) 証明(説明)の読み、振り返りによる発展的考察(主として $\beta 2$)

全国調査では、「事柄が正しいことを証明(説明)して終わりにするのではなく、

証明（説明）を振り返って考えることの大切さ」と、その際「証明を書くことだけでなく、証明を読むこと」の重要性を感じ得る問題が、繰り返し出題されている²⁴。

一連の数学的問題解決過程における「振り返ること（looking back）」の重要性を顕在的に定式化した数学教育学者に、G.ポリャ（Polya）がいる²⁵。ポリャは「一度得た結果を振り返ることは、それを導いた筋道を再考したり再吟味したりすることを通じて、彼らの知識をより確かなものにし、問題解決能力を伸ばしてくれる」ことを指摘すると同時に、多くの問題解決者が、「その作業において重要で意義深い（振り返ることという）フェーズを見逃してしまう」ことに注意を喚起している²⁶。

これまでの高等学校数学では、例えば制限時間を伴う試験では特にそうであるが、構成し終わった正しい証明を読み返し再検討することは標準的ではなかったかもしれない。しかし、文化としての数学やその言語としての役割に配慮すれば、証明を振り返ることに端を発する様々な考え方や概念の発見や発展的考察を体験することの数学教育的価値は、非常に高い。従って、問題解決での「振り返ること」を大切にす姿勢・態度を身に付けることは、数学科の範疇に留まらない確かな学力の育成につながるといえる。

3) 方針に基づいて証明したり、証明の方針を立てたりすること（主として $\beta 1$ ）

証明（説明）を読むことの重要性は前項で扱った通りであるが、「結論を導くために何が必要であるかを明らかにしたり、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質や関係を見いだしたりするなどして、証明の方針を立てる必要がある」²⁷ことも見逃すことができない。つまり、証明（説明）の構想を練る活動もまた、学習における重要な活動であることを認識したい。

例えば先述のポリャは、この活動を「計画を創案すること（devising a plan）」と名付けたフェーズに位置付け、何度も試行錯誤を繰り返した上で「計画立案のための考えを思いつくこと」が、問題解決で最も重要なことであると指摘する²⁸。さらに実践の場面では、計画のための「良い考えが浮かばない生徒に対して、教師はそのような素晴らしい思いつきができるようにそっと支援するのが最も良いことである」と述べている²⁹。

この数学的なプロセスについても、高校生の主体的な数学的活動において言語活動を充実させる上で、必要不可欠な要因となろう。

(3) 課題案の提案

以上の議論を踏まえ、高等学校数学で言語活動の充実を目指すための課題案の一つとして、高等学校数学 A「整数の性質」の学習指導を前提とした次の課題を提案する。

以下、筆者が推測可能な範囲で、上記課題の解決過程を通じて如何なる言語活動が展開され得るかを、表 1 の記述との関連を括弧内に示しながら論じる³⁰。なお以下では便宜上、解決過程を複数の段階に分けて記述するが、これらは非独立でかつ順序性を示すものではない。

○ 次のような整数のわり算の余りについて調べよ。

$2^4 \div 5$	$3^4 \div 5$	$4^4 \div 5$	$5^4 \div 5$...
$2^6 \div 7$	$3^6 \div 7$	$4^6 \div 7$	$5^6 \div 7$...
$2^8 \div 9$	$3^8 \div 9$	$4^8 \div 9$	$5^8 \div 9$...
$2^{10} \div 11$	$3^{10} \div 11$	$4^{10} \div 11$	$5^{10} \div 11$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

1) 新たな性質の帰納的な方法による発見

整数の除法に関するこの課題は、多くの高校生にとって取り組み易く、課題の意図や結果を読み違える者は少ない。その状況下で徐々に、計算結果の多くが「余り1」になっていることに気づき、疑問をもち始める。そこで教師が、何らかの観点から規則性を見いだすよう発問すると、高校生たちは、得られた結果を振り返って考え（ β 2）、計算結果の取捨選択など何らかの意味での理想化・単純化（ α 1, α 2）を施した予想をたて、その結果を数学的に表現する（ α 3）よう試みる。そのような試行錯誤の結果として、次の2つの系列に沿った予想を見いだす高校生の存在が想定される。第一の系列は、各行の計算結果を一般化して得られる、例えば次のような予想である。

[A-1] a が5の倍数であるとき、 $a^4 \div 5$ の余りは0となる。

[A-2] a が5の倍数でないとき、 $a^4 \div 5$ の余りは1となる。

第二の系列は、各列の計算結果を一般化して得られる、例えば次のような予想である。

[B-1] $3^{(\text{偶数})} \div (\text{奇数})$ の余りは1となる。

[B-2] n が偶数であるとき、 $3^n \div (n+1)$ の余りは1となる。

勿論、初期段階では、このような整った形式による表現は得られにくい。高校生同士のグループ活動や集団内での発表・相談活動、あるいは後述する2)のプロセスなどを経て、徐々に数学的に精緻化され、整った表現へと修正されていく場合がほとんどである。初期段階での素朴なアイデアや表現が徐々に精緻化され、集団内での共通理解を促す数学的に整った表現へと変容していくこのプロセスは、言わば、数学のもつ言語性を実感するプロセスである。

2) 見いだした性質の分類整理

複数の予想に対しては、それぞれの予想がどのような推測から得られたのかを明らかにし、それらの関連性を検討して分類整理すべきであろう（ γ 1, γ 2）。このプロセスには、例えば、予想した事実の真偽の検証がその高校生たちに可能か否かなども含めて、教師による適切な支援が不可欠である。ここで例示した第一の系列に沿った予想の場合、[A-1]と[A-2]が相補的であることに加え、既習命題「任意の自然数の二乗数を3で割ると、その余りは0か1である」との関連性に気づくことができるかもしれない。また、第2の系列に沿った予想では、[B-1]よりも[B-2]が事実を正しく表現していること、更には8乗を9で割る計算の結果が[B-2]の反例となることから、より正確な次の予想を見いだし得ることなどが想定される。

[B-3] p が奇素数であるとき、 $3^{p-1} \div p$ の余りは 1 となる。

このような予想の序列・修正過程では、例えば、対話や議論を通じて「自分の思考・理解が深まり新たな発想が生まれる実感」を得たり、「根拠を基にして、ある事柄が『正しい』『正しくない』ということを明確に説明」する機会を得たりすることができる (β2)。

なお、上に示した 1) 2) のプロセスに順序性はなく、相互に繰り返して影響し合っこそ、意味のある活動となる。予想の正しさを証明する以前行われるべきこのような活動こそ、筆者が学校数学において最も重要視したい言語活動の一つであり、可能な限り時間をかけて行うべき活動と考える。

3) 見いだした性質の真偽の検証

見いだした予想の分類整理がある程度済んだ段階で、その真偽を検証する必要がある (β1)。ここでも、各予想の演繹的証明を関連付けて捉えることが望まれる。例えば、第一の系列に沿って得られた 2 つの予想を比較すると、[A-1] の演繹的証明方法が [A-2] の演繹的証明の要点を誘導する。実際、[A-2] については、被除数の底を 5 の倍数とそうでない数とに分けて表現し展開公式を用いるという考えが、演繹的証明の本質に関わる。この考えは、[A-1] の演繹的証明の際に確実に用いられる考えである。

$$7^4 \div 5 = (5+2)^4 \div 5 = (5^4 + 4 \cdot 5^3 \cdot 2 + 6 \cdot 5^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 5 \cdot 2^3 + 2^4) \div 5$$

この式変形の趣旨が理解できれば、被除数の底がどんな自然数であっても通用可能な演繹的な証明の方針が得られる (β1)。

$$51^4 \div 5 = (50+1)^4 \div 5 = (50^4 + 4 \cdot 50^3 + 6 \cdot 50^2 + 4 \cdot 50 + 1) \div 5$$

$$49^4 \div 5 = (50-1)^4 \div 5 = (50^4 - 4 \cdot 50^3 + 6 \cdot 50^2 - 4 \cdot 50 + 1) \div 5$$

この考えに従った上で、数学的帰納法に類する説明の方法を用いれば、第一の系列に沿った予想のほぼすべての真偽を確定させることができよう。

4) 証明の振り返りから得られる新たな事実

さて、上記証明を高校生が主体的に行う場合、被除数から 1 を引いた数が 5 で割り切れることを証明する方が容易であると判断する高校生が、ほぼ確実に現れる。例えば、

$$51^4 - 1 = (51^2 - 1)(51^2 + 1) = (51 - 1)(51 + 1)(51^2 + 1) = 50(51 + 1)(51^2 + 1)$$

という式変形によって証明する高校生である。このように多面的にものを見ることも、課題解決の過程では重要な意味をもつ (γ3)。実はこの課題の場合、第二の系列から得られた予想 [B-3] の真偽を確認する際には、次のような予想の読替えを施した方が、その演繹的証明の方針を見出し易い (β2, α3)。

[B-4] p が奇素数であるとき、 $3^{p-1} - 1$ は p の倍数となる。

この種の読替えによって、この予想が正しいことを示すための証明の本質が展開公式、実質的には 2 項定理の解釈にあることなどを見通すことが可能となる。この証明の方向性は、第二の系列に沿った予想の多くの真偽を確定させるのに役立つ。これ以

降に現れる新たな予想や証明方法については、紙面の都合上、割愛する。

以上のように、関連する予想（命題）の証明で用いられた考えが、より発展的な予想（命題）の証明方法を導く様子は、演繹的証明を学ぶ教育的意義や、一度解決した事実を振り返ることのよさを感じ得するための好例となろう。

5. おわりに

本稿の主題は、高等学校数学における言語活動の在り方にあるが、この問題意識の根底には、如何なる言語活動を如何に充実していけば良いのかという素朴な疑問があった。結論を端的に言えば、言語活動はそれ自体が目的になるものではないこと、そして各教科・領域で達成を目指すべき目標があり、その目標達成のための方法に言語活動が位置づくということである。生徒たちの学習指導に関わる我々教師、あるいは教育学者は、各教科・領域の目標や授業の目的をどう設定し、生徒たちの人間形成に寄与していくかを常に意識していく必要がある。そして、そのための学習指導観・教育観の修養を怠ってはならない。

■註及び参考文献

- 1 文部科学省中央教育審議会（2008）、『幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）』、http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo/toushin/_icsFiles/afieldfile/2009/05/12/1216828_1.pdf（2012.11.5 参照）。
- 2 文部科学省中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会（2007）、『教育課程部会におけるこれまでの審議のまとめ』http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo/3/siryo/07110606/001.pdf（2012.11.5 参照）。
- 3 前掲，pp. 25-26.
- 4 文部科学省（2009 a）、『高等学校学習指導要領』，東山書房.，p. 63.
- 5 文部科学省（2009 b）、『高等学校学習指導要領解説：数学編理数編』，実教出版.，p. 72.
 ここには、高等学校数学科での言語活動を促す学習活動が以下のように例示されている。
 ・授業のまとめとして、その時間のポイントなどを生徒に表現させる。
 ・問題の解答を板書させ、どのように考えて解いたかを説明させたり、どのようにすればよりよい表現になるかを考えさせたりする。
 ・問題の解決で、誤った解答に対しては、どこが誤りか、誤っていると言える理由は何か、どこをどのように修正すれば正答になるかなどを生徒に考えさせ説明させる。
- 6 高橋聡（2012）、「高等学校数学における数学的活動：新しい検定教科書での『課題学習』の取り扱いに着目して」、『椋山女学園大学教育学部紀要』，5，13-21.
- 7 例えば、第94回全国算数・数学教育研究（福岡）大会シンポジウム「なぜ、今、言語活動が重視されるのか」（2012年8月8日）において、類似する意見の表明が見られた。
- 8 この調査は、文部科学省と国立教育政策研究所教育課程研究センターが共同で実施しているもので、東日本大震災等の影響で実施が見送られた平成23年度調査を含めれば、平成24年度調査が6回目となる。各回の調査における問題・解説・結果の分析等の詳細は、以下のURLから閲覧することが出来る。
<http://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html>

- 9 国立教育政策研究所(2012),『平成 24 年度全国学力・学習状況調査解説資料：中学校数学』,
http://www.nier.go.jp/12_chousa/12_kaisetsu_chuu_suugaku.pdf (2012.11.5 参照), p. 1.
 なお、高校生の論理的思考力の評価に特化して平成 24 (2012) 年 2 月に実施された「特定の課題に関する調査」(報告書は平成 24 年度中に公開)が存在するものの、高等学校数学において同趣旨の下で実施される調査は、現段階で計画されていない。
- 10 文部科学省中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会 (2006),『審議経過報告』,
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo_0/toushin/06021401/all.pdf (2012. 11. 5 参照),
 pp. 12-13.
- 11 文部科学省 (2007),『言語力の育成方策について (報告書案)【修正案・反映版】』,
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shotou/036/shiryo/07081717/004.htm (2012. 11. 5 参照).
- 12 文部科学省中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会 (2007), pp. 53-54.
- 13 前掲, p. 25.
- 14 文部科学省 (2007) における実際の記述は、以下の通りである。
 ○算数・数学科では、算数・数学を活用して考えたり判断したりする活動に重点をおきその活動がよりよく行われるよう、言葉や数、式、図、表、グラフなどを用いて、筋道を立てて説明したり論理的に考えたりして、自ら納得したり他者を説得したりする指導を行うことが大切である。また、予測や推測を生み出しそれらを確かめたり、よりよい予測や推測をしりするため指導を行うことも大切である。
 ○その際、帰納的な考え方や類比の考え方、予測や推測を検証するための演繹的な考え方をはぐくむ必要があり、それらの考え方をよりよく用いるために必要な言語力を身に付けさせることが期待される。例えば、事実の説明あるいは理由や手順の説明の仕方を身に付けさせることなどである。
 なお、指導にあたっては、根拠を基にして、ある事柄が「正しい」「正しくない」ということを明確に説明できるようにすることが期待される。
- 15 文部科学省(2008 a),『小学校学習指導要領』, 東京書籍., p. 44, p. 47, p. 50, p. 53, pp. 56-57, p. 59.
- 16 文部科学省 (2008 b),『中学校学習指導要領』, 東山書房., p. 49, p. 52, p. 54-55.
- 17 国立教育政策研究所 (2012), p. 5.
 なお実際の調査では、「主として『知識』に関する問題」を「A 問題」,「主として『活用』に関する問題」を「B 問題」と呼んで区別している。
- 18 前掲, p. 5.
- 19 前掲, p. 9.
- 20 文部科学省 (2008 b),『中学校学習指導要領』, 東山書房., p. 54.
- 21 日本数学教育学会研究部高等学校部会 (2012),「第 94 回全国算数・数学教育研究(福岡)大会基調発表：教育課程」,『日本数学教育学会誌』, 94 (3), 42-44., p. 44.
- 22 岩田耕司 (2012),「出題の趣旨にみる全国学力・学習状況調査の出題の意図と今後の課題：主として『活用』に関する問題に焦点をあてて」,『日本数学教育学会誌』, 94 (9), 34-37.
- 23 前掲, p. 35.
- 24 前掲, pp. 35-36.
- 25 Polya, G.(1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Univ Press.
- 26 前掲, pp. 14-15.。なお、括弧内は引用者による補いである。
- 27 前掲, 岩田 (2012), p. 36.
- 28 前掲, Polya (1945), p. 8.
- 29 前掲, pp. 8-9.
- 30 本課題案は、所謂「フェルマーの小定理」を素材とした課題である。なお、この課題案を検討するにあたり、筑波大学附属高等学校、及び同校第 121 回 6 組生徒諸君より継続的かつ好意的な協力を得た。ここに記して感謝申し上げる。