

論文 (Article)

高等学校数学における数学的活動

—新しい検定教科書での「課題学習」の取扱いに着目して—

**Mathematical Activities on School Mathematics for
High School Students
Focused on the “Problem Situation Learning
(Kadai-Gakushu)” in New Japanese Textbooks**

高橋 聡
Takahashi Satoshi*

摘 要

高等学校数学における数学的活動のより一層の充実をねらった新しい教育内容「課題学習」が、平成24年度から用いられる検定教科書において、どのように扱われているのかを調査した。数学的問題解決理論から抽出した観点を基に分析した結果、課題解決の見通しを立てる活動や、解決過程を振り返る活動に関わる記述に不十分さを指摘するに至り、「課題学習」の意図を実現するには、直接的な学習指導に関わる数学教師の総合的な力量が問われる可能性が高いことを示唆した。

キーワード：高等学校数学、数学的活動、数学的問題解決、課題学習、教科書分析

1. はじめに

(1) 高等学校数学における数学的活動の位置

平成20年1月の中央教育審議会答申では、思考力・判断力・表現力等の育成の観点から、知識・技能の活用を重視し言語活動を充実させることがすべての校種・教科等を貫く重要な視点とされた¹。算数・数学科の学習指導においても、「理数教育の充実」と連動して、知的活動の基盤たる数学の言語としての役割を強調することが求められた。

この要求に応じた平成20年度告示学習指導要領では、算数・数学科において、小・中・高等学校を通じて数学的活動をより一層充実させることが、文言化された。簡単に言えば、数学的活動は、児童・生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学に関わりのある様々な営み全般を意味する。具体的には、例えば中学校数学科では、「既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見出し、発展させる活動」や「日常生活や社会で数学を利用する活動」、「数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動」を含む多様な活動と規定されている²。この規定からも、数学的活動の重視と言語活動の充実との深い関連が明白である。

高等学校数学において特に注目したいのは、その教科目標において「数学的活動を

通して」学習指導が実施されるべきことが明文化されたこと、数学的活動を生かした指導を一層充実することを意図した教育内容（「課題学習」）が、必修修科目「数学Ⅰ」と多くの生徒の選択が見込まれる科目「数学A」に初めて位置づいたこと、そして、数学的活動をその後の学習や社会生活、日常生活などに生かすことがねらわれていることである³。これは、数学的活動が、高等学校数学の方法・内容・目的にバランスよく位置付けられたことを意味する。例えば長尾（2009）は、これまでの高等学校での数学指導は、大学入試の影響もあり、知識や技能の教え込みになりやすく、生徒の創造性の基礎を培うという数学科の目標に対して、高い意識をもつ数学教師は多くないことを指摘している⁴。学習指導要領での意図を踏まえた高等学校数学科での学習指導が、今後どのように実施されるか、そして意図された目標がどのように達成されていくのか、あるいは達成されないのかについて、我々は客観的な視点から注目していく必要がある。

(2) 本稿の目的

平成21年3月に告示された学習指導要領に基づく高等学校数学は、他教科に先行する形で、平成24年度から学年進行により逐次実施される。その際に用いられる教科書の検定作業が平成23年3月に終了し、翌4月には教科書目録が公表された⁵。

我が国の学校数学では、教科書を主たる教材とする場合が多く、その記述内容が学校数学における実施されたカリキュラムに強い影響を与えていることは、疑いようのない事実であろう。したがって、教科書の記載内容に学習指導要領の意図がどのようにとり入れられ、どのような題材・方法を通じて目的の達成が目指されているかを明らかにすることは、高等学校数学が今後どのように実施されていくのか予測する上で、非常に重要である。特に、高等学校数学に新しく位置づいた「課題学習」に対応する記述がどのように為されているかを知ることは、高等学校数学における数学的活動を通じた学習指導が、今後、地に足の着いたものとして実施され得るか否かをみていくうえで、非常に興味深く、しかも重要といえる。

そこで本稿では、平成24年度から使用される高等学校「数学Ⅰ」「数学A」の教科書において課題学習がどのように扱われているかについて調査し、今後の高等学校数学における数学的活動を通じた学習指導での留意事項を指摘することを目的とする。

2. 分析の観点

(1) 数学的活動とその概念規定

新しい学習指導要領の数学科の解説では、「真の数学の学習」は「目的意識をもった主体的活動を通してのみ」可能であるとした上で、数学的活動を「数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動」と規定し、その学習指導において留意すべき事項を次のように挙げている⁶。

指導に当たっては、各科目の特質に応じ数学的活動を重視し、数学を学習する意義などを実感できるようにするとともに、次の事項に配慮するものとする。

- ①自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。
- ②学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。
- ③自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。

①では、数学的活動が問題解決の形式をもって進められるべきことや、その過程を振り返って考えを深めることを通じて新たに生じる課題やその解決活動につなげることが重要であることが述べられている。そこで見出された方法や数学的な考えを基にして具体的な事象に活用したり、解決過程において他者に説明したり議論したりすることが、②や③で求められている内容である。これらは、数学のよさを実感することや、言語活動を充実させることに直結する内容であり、数学的な問題解決を通じた学習活動の効果がより一層強まるための必要条件と考える。

よって本稿では、数学的問題解決理論の1つであるオープンエンドアプローチ (Open-Ended Approach) の文脈の中で数学的活動を扱っている島田茂による論考⁷を、分析の観点を抽出するための主要な先行研究として採りあげる。

(2) 観点の抽出

島田はこの論考の中で、数学的活動を、「既成の数学の理論を理解しようとして考えたり、数学の問題を解こうとして考えたり、あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり、数学を何かに応用して、数学外の問題を解決しようとしたりする、数学に関係した思考活動」の総称と規定した後、図1に示すモデルを用いながら、「c.問題」から始まる数学的活動の過程について詳述している⁸。本稿ではここでの記述の中から、現在あるいは今後の高等学校数学における数学的活動を議論するための3つの観点を抽出する。

1) 第一の観点

島田は数学的活動のモデル (図1) を説明するなかで、「aの現実の世界」は「必ずしも物理的な経験世界だけを意味するものと限る必要はない」のであり、「bの数学の世界より抽象度の低い世界であってもよい」と指摘する⁹。これに関連して、例えば、平成11年3月に告示された現行学習指導要領で数学的活動と身近な事象との関連が強調されたことや、OECDが実施した生徒の学力到達度調査 (PISA) で現実の世界で遭遇

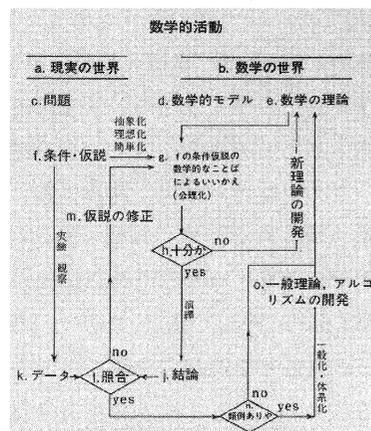


図1 (島田, 1977, p.15)

するような問題が重点的に取り上げられたことなどの影響と思われるが、数学的活動が、現実世界での事象を数学化した上で問題解決を図る活動に限定されて捉えられる傾向が、少なからず見受けられる。しかしながら本来の数学的活動は、具体的な事象や操作に限定される活動ではないことに注意する必要がある。これは、比較的抽象度の高い数学を扱う高等学校数学について議論する際には、特に意識する必要がある。

すべての高校生が行う「課題学習」では、現実事象から生じる問題を始点として展開される学習活動と、相対的に抽象度の低い数学の世界から生じる問題を始点として展開される学習活動との双方を考慮したうえで、生徒の実態や教育内容の特性に応じたバランスを保つことが重要と考える。これを踏まえて本稿における分析の第一の観点を、現実事象から生じる課題と抽象度の低い数学から生じる課題のバランスの有無とし、以後観点 A と表記する。

2) 第二、第三の観点

さらにその論考の中で鳥田は、本来の問題解決場面では、問題（「c.」）から見出される「条件や仮説を数学的に言い換えることから出発」するが、当時の「ふつうに教室で行われてきた学習活動」の「多くは数学的に言い換えられた段階、g から出発している」ことを指摘する¹⁰。これは、本来の問題解決では必ず行われるはずの条件から仮説を設定する段階（「f.」）や、抽象化、理想化、単純化などの過程（「f. → g.」）が、算数・数学科の授業で意識されていなかったこと、言い換えれば、解決の見通しを立てる活動が不十分であったことを示唆する。

加えて鳥田は、当時扱われていた課題は「結論が予め決まっている」場合が多く、普通は様々な方向への発展が想定される過程であるはずの一般化の過程（「n. → o.」）などにおいても、「一般理論は教師の計画として前もって決まっておき、予定から外れた一般化が子どもから示唆されても、わきに置かれることが多い」と問題視する¹¹。また、数学の世界（「b.」）において一応の解決をみた段階で得られた結論（「j.」）を元の問題（「c.」）やデータ（「k.」）と照合（「l.」）して、合致しなければ仮説（「m.」）の修正に向かうのが本来の問題解決であるが、この「修正と模索を繰り返す」過程（「l. → m.」）を通じた「質の高い定式化」を可能とする「既習のことを総合した高い能力」、いわば「発想と発想転換の能力」を育成することの重要性も述べ、「算数・数学教育における子どもの学習活動の中に f. → g. → l. → m の過程や n. → o. の過程に相当することを含めること」を提案している¹²。

この提案は、今回、各教科等における言語力の育成を議論した言語力育成協力者会議の報告書案¹³での算数・数学科の特質を踏まえた指導の充実の考え方である、「予測や推測を生み出しそれらを確認めたり、よりよい予測や推測をしりするための指導を行うことも大切」であり、「根拠を基にして、ある事柄が『正しい』『正しくない』ということを明確に説明できるようにすること」が期待されたことと通じるものがある。また、新しく告示された学習指導要領の総則に、すべての学校種に共通する配慮事項となった「学習の見通しを立てたり学習したことを振り返ったりする活動を計画

的に取り入れること」¹⁴との本質的な共通点を見出すこともできよう。これらの言及を踏まえて、本稿における分析の第二の観点を、課題解決の見通しを立てる活動の有無とその質と設定し、観点Bと表記する。

さらに、数学的活動について、例えば永田(2008)は「ややもすると『数学的活動＝体を動かすこと』といった誤解が生じかねないような状況も見られる」ことに対して警鐘を鳴らしている¹⁵。このような状況の要因には、指導する教師にも学習する生徒にも、思考力・判断力・表現力等を育むための「学習活動の基盤となるものは、数式などを含む広い意味での言語」¹⁶であるという意識が低いことがあると考えられる。数学に付随する言語性は、常に意識されるべき重要な特性であるが、特に「学習したことを振り返ったりする活動」においてその真価が発揮されると、筆者は考える。以上を踏まえて、本稿における分析の第三の観点を、課題の解決過程を振り返る活動の有無とその質と設定し、以後観点Cと表記する。

もちろん、観点Bと観点Cは完全に分離されるものではない。例えば、ある課題の振り返りに端を発する試行錯誤が、次の課題の仮説設定に直接関わる場合もあるからである。この2つの観点は表裏一体の体を為している。

3. 教科書の分析

(1) 分析の対象

本稿の分析の対象は、文部科学省が平成23年4月に公開した教科書目録の第1部に登載された、平成24年度に用いられる「数学I」および「数学A」の教科書、具体的には、5つの出版社による「数学I」(16種)、「数学A」(16種)全32種の教科書に掲載された「課題研究」に関わる記述内容である。以下に、出版社別・目録登載順に書名を挙げる¹⁷。

東京書籍:「数学I」「新編数学I」「新数学I」「数学A」「新編数学A」「新数学A」
 実教出版:「数学I」「新版数学I」「高校数学I」「数学A」「新版数学A」「高校数学A」
 啓林館:「詳説数学I」「数学I」「新編数学I」「詳説数学A」「数学A」「新編数学A」
 数研出版:「数学I」「高等学校数学I」「新編数学I」「最新数学I」「新高校の数学I」
 「数学A」「高等学校数学A」「新編数学A」「最新数学A」「新高校の数学A」
 第一学習社:「高等学校数学I」「高等学校新編数学I」
 「高等学校数学A」「高等学校新編数学A」

なお、教科書研究では本来、編集趣意書や教師用指導書の内容も考慮すべきだが、教師用指導書が未公開であるなどの事情のため、本稿では分析対象からは除外した。

(2) 分析の方法

基本的な情報となる出版社名や、対象とする高校生の数学的能力の程度、解決に必要な包括的アイデアが含まれる主な教育内容、「課題学習」に関わる内容のタイト

ルなどに加えて、前節で抽出した3つの観点をを用いる。再掲すると次のようになる。

観点A：現実事象から生じる課題と抽象度の低い数学から生じる課題のバランス

観点B：課題解決の見通しを立てる活動の有無とその質

観点C：課題の解決過程を振り返る活動の有無とその質

4. 考察

(1) 観点Aに着目して

調査対象とした教科書出版会社5社中2社が、教科書のレベルに関わらず同じ記述による同一課題を掲載する一方、残りの3社は、教科書のレベルに応じてその課題や記述に違いがある内容になっている。

同じ記述による同一課題を掲載した教科書では、観点Aからみると、バランスの良い課題構成である傾向が強い。反対に、その課題や記述に違いがある教科書では、例えば最も発展的なレベルの教科書では「抽象度の低い数学から生じる課題」が多く、最も基礎的なレベルの教科書では「現実事象から生じる課題」がほとんどであるという特徴がみられた。特に後者については、与えられた現実事象の課題を解決するためだけと思われる記述に終始する教科書記述も少なくない。

この状況の主な理由には、使用が想定される高校生の数学的能力の程度に配慮していることが挙げられるが、そのことについて若干の注意を促したい。確かに、最も基礎的なレベルの教科書を使用するであろう高校生たちの数学的能力は高くないかもしれない。しかし、そうであるならば尚更、中学校までの既習内容を振り返る契機となるような問いかけや、その背景にある数学的な構造に気づかせるような問を設定すべきと考える。例えば、実教出版の「高校数学I」に掲載されている「課題3『角度を変えて斜面を滑ろう』」¹⁸では、山の斜面を緩やかに降りるための方法を考察する中で、現実的に課題を解決するだけでなく、その解決過程で直角三角形や相似な三角形、長さから角度を求める考え（逆三角関数の考え）などに触れることができ、既習内容や、更なる発展的な学習内容に関わることができる設問がみられる。

現実事象という観点から生徒の自己興味による探求を重視しつつも、表面的に取り上げられる数学ばかりでなく、その背景にある数学的な構造を顕在化することは、元の問題を解決していく際に数学をうまく利用していくためにも必要なことである。現実事象の問題の解決過程、あるいは解決後に、主体的で数学的な活動がどのように展開できるのかに配慮していく必要がある。

(2) 観点Bに着目して

課題解決の見通しを立てることは、その学習の必要性や、その学習の方向性などを学習者一人ひとりがしっかりと考えることに直結するため、生徒の自主的・主体的な学習を促していく上で最も重要な観点であると筆者は捉える。ゆえに、この観点から

の分析が本稿において最も重要な考察となるはずであった。しかしながら、本稿では分析対象を教科書記述に限定せざるを得なかったため、各課題が解決の見通しを立てることを意図しているかどうかの決定的な判断を下すことができなかった。したがってこの観点からの真の分析は、これら教科書の編集趣意書や教師用指導書が公開されてからの作業となる。この状況を認めつつ、本稿では次の2点について具体的に言及したい。

1点目は、数研出版の最も発展的なレベルの教科書「数学A」に掲載された「課題10『累乗と余り』」という課題¹⁹に関する指摘である。この課題は初等整数論の顕著な結果である「フェルマーの小定理」、即ち、 p を素数、 a を p と互いに素な自然数としたときに、 $a^{p-1}-1$ が p で割り切れるという性質に関わる課題であるが、この課題に係る提示方法に疑問を投げかけたい。この教科書の記述では、冒頭で定理を紹介し、次に $p=7$ の場合にその性質が成り立つことを直接計算で確認し、 $p=13$ の場合に数学的な根拠をもって証明することが意図される。そして最後に、これが暗号理論にも利用されている事実が宣言されるのだが、このような記述は、既存の教科書で「発展的な内容」として扱われる際の記述と大差ない。数学的学習をより一層促すのであれば、 p や a の具体的な値を設定せずに、学習者それぞれが様々な自然数で試行錯誤して仮説を立て、その仮説を修正していく活動を通じて初めて正しい性質に気づく、つまり数学を生み出す活動を経験できると考えるが、少なくともこの記述では、唐突に「素数」に関する性質であることが与えられる程度に留まっている。これでは、島田(1977)が危惧するような、予め結果が分かっている性質の後追いをするだけの学習になり、本来の問題解決過程を経験する学習には程遠いと考える。教師用指導書等での、この記述の意図に関する説明を待って再度議論したい。

もう1点は、今回調査した教科書の中で、啓林館の教科書(全6種)が、他社とは異なる形式で「課題学習」に関わる内容を記述していた点である。その形式とは、具体的な課題を提示する前に、「課題の見つけ方」(1頁)、「課題への取り組み方」(「レポートのまとめ方」を含めて3頁)を設けて、一般的な数学的課題解決の手法を説明する形式である。この形式は、指導に当たる教師には勿論、学習する高校生にも「課題学習」が本来意図する意義などが自然に伝わる可能性が高い形式であると、筆者は考える。

一方で、このような記述形式は既存の教科書での問題・課題のそれと比較して明らかに異質な形式であるため、指導に当たる教師や学習する高校生が「課題学習」を行うこと自体を敬遠する危険もあると考える。このことは、今回の「数学的活動の充実」の趣旨に近い理念の下で、指導者と学習者が一緒に教育内容を創り上げていくという立場で記述された教科書が、一部で、「使いにくい」、「難しい」と評価された過去の事実を想起させる。具体的には、「～を計算せよ」「～を求めよ」という問いの形式ではなく、「～はどこが違いますか」「～を踏まえて、新しい問題を作ってください」「～の表から何がわかりますか」などと設問形式が改良されたが、これに対し何をどこまで考えれば良いのかが分からず、子どもも教師も戸惑ったという報告が為されて

いる²⁰。今回の啓林館教科書の試みにどのような反響があるか、大変興味深い。

(3) 観点Cに着目して

課題学習での解決過程を振り返ることが最も明示的に意図されているのが、東京書籍の「新編数学 I」「新編数学 A」である。というのも、この教科書での課題学習はまず、各章の導入課題として位置付けられ扉に掲載されている。ここで生徒の興味・関心を高めた上で内容の学習が進み、巻末において更なる課題に取り組めるような意図が読み取れる。他社の教科書にも、一度解決された課題を振り返り、更なる課題を見出し、それを解決することを意図する設問形式が目立つ。また、学習者同士で解決過程を発表など何らかの形で伝え合い、成果を共有することなどが意図された記述もある。

ここで考慮すべきは、高校生が行った学習活動を、指導する立場にある教師がどう捉えているかという点である。つまり数学的活動には、それぞれの生徒に見合った思考活動の様々な振り返りがあるのであり、より発展的な思考を促したりその意義や有用性を考えさせたりするためには、教師の支援、あるいは教師による“仕掛け”が不可欠なのである。このような教師の意識や支援があれば、例えば、大学入試の為の問題演習であっても、大学入試という狭い枠に収まることのない問題解決過程を意識した数学的活動となろう。逆にこのような教師の意識や支援がない課題学習は、単に応用問題の解答記述の反復練習になってしまう可能性が極めて高い。

さらに、実際の授業場面で解決の解決過程を振り返る場合は、一般に、議論の方向が発散する可能性が高い。その発散した議論をまとめ上げるには、教師の数学的力量や生徒の反応の事前予測、数学的な話し合いを通じた意見集約を可能とするクラスの雰囲気づくりなど、数学教師としての総合的力量が必要となる上、学習者がこれまで経験してきた数学的活動がどのようなものなのかをより広い視野をもって鳥瞰することが求められる。前者については言うまでもなく、教師の日常的な研鑽の蓄積が必要条件といえる。後者については、例えば清水（2009）が数学的活動を4つの活動に分類して小・中学校の数学的活動の滑らかな接続を議論しているように²¹、数学的活動を小・中・高等学校、さらにはそれ以前・以後も含めて体系的に捉える意識が、直接指導する立場にある教師に求められる。

5. おわりに

数学の学習指導を教科書の記述だけを基にして実施すると、本来意図する学習指導は実施困難となる。本稿の結論は、言い古されたこの主張に帰着する。これはすなわち、高等学校数学において数学的活動を促す学習指導が教育現場に根を下ろすには、直接生徒に相对する教師がその趣旨を理解し、それを実現し得る総合的な力量を身につける必要があることを意味している。言い換えれば、教師自らが良い意味での数学的活動を行えることが必要といえる。

■註及び文献

- 1 文部科学省 (2008a), 『幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について (答申)』, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/_icsFiles/afildfile/2009/05/12/1216828_1.pdf (2011.11.4 参照) .
- 2 文部科学省 (2008b), 『中学校学習指導要領解説; 数学編』, 教育出版., p.67.
- 3 文部科学省 (2009a), 『高等学校学習指導要領』, 東山書房.
- 4 長尾篤志 (2009), 「高等学校数学科新学習指導要領で目指すもの」, 『日本数学教育学会誌』, 91 (3), 10-17., p.17.
- 5 文部科学省 (2011), 『高等学校用教科書目録 (平成 24 年度使用)』, http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/kyoukasho/mokuroku/23/_icsFiles/afildfile/2011/04/25/1305342_03.pdf (2011.11.4 参照)
- 6 文部科学省 (2009b), 『高等学校学習指導要領解説; 数学編理数編』, 実教出版.
- 7 島田茂 (1977), 「オープンエンドアプローチの意義」, 島田茂編, 『算数・数学科のオープンエンドアプローチ; 授業改善への新しい提案』, みずうみ書房, 9-21.
 なお, この提案を実現するために島田自身が提示した方略「オープンエンドアプローチ」は海外の研究者からも高く評価され, 現在でも英訳本の増刷が為されている。
- 8 前掲, pp.14-21.
- 9 前掲, p.14.
- 10 前掲, p.19.
- 11 前掲, pp.19-20.
- 12 前掲, p.20.
- 13 文部科学省 (2007), 『言語力の育成方策について (報告書案)【修正案・反映版】』, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shotou/036/shiryo/07081717/004.htm (2011.11.4 参照).
- 14 例えば高等学校の場合は, 文部科学省 (2009a) の第 1 章第 5 款第 5 項「教育課程の実施にあたって」の (5) に, その記述がある。
- 15 永田潤一郎 (2008), 「新しい中学校学習指導要領が目指す数学教育」, 『日本数学教育学会誌』, 90 (5), 14-22., pp.19-20.
- 16 文部科学省 (2008a), p.25.
- 17 文部科学省 (2011), p.1, p.3.
 なお, 各社ホームページの情報によれば, 両科目とも, 最初に記載した教科書が最も発展的なレベルの教科書であり, 順に基本的なレベルの教科書であるとされる。
- 18 岡本和夫, ピーター・フランクル他 10 名 (印刷中), 『高校数学 I』, 実教出版., pp.166-67.
- 19 坪井俊他 13 名 (印刷中), 『数学 A』, 数研出版., p.161.
- 20 松宮哲夫 (2007), 『伝説の算数教科書〈緑表紙〉; 塩野直道の考えたこと』, 岩波科学ライブラリー, 135, 岩波書店.
 この中で, 著名な数学者である志賀浩二や上野健爾が, この“緑表紙”教科書を「木を育てる思想」がある教科書, 日本の教科書で「これ以上にすぐれた本は出なかった, 最高の到達点であった」として称賛していることが紹介されている。
- 21 清水静海 (2009), 『平成 20 年度改訂中学校教育課程講座; 数学』, ぎょうせい., pp.62-63.
 ここでは, 数学的活動を 4 つの側面:「算数・数学を実感する活動」, 「算数・数学を生み出す活動」, 「算数・数学を事象の考察に利用する活動」, 「数学的表現を用いて説明し伝え合い高める活動」から観ることを通じて, 小・中学校の数学的活動に滑らかな接続を与え得ることが述べられている。